R

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

<366283424100l4 S

<366283424100l4

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 87
—1

Mathesis. Systemata & methodi.

130.

R

Lehrbegriff der gesamten Mathematik.

Aufgesetzt
von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,

Der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churfl. Akademie der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der oconomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.

Der erste Theil.

Die Rechenkunst und Geometrie.

Zweyte Auflage.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röse. 1782.

Dem

Durchlauchtigsten Herzog und Herrn,

Herrn Friederich,

Regierendem Herzoge zu Meklenburg,
Fürsten zu Wenden, Schwerin und Ratzeburg,
auch Grafen zu Schwerin, der Lande Rostok
und Stargard Herrn,

Stadtbibliothek
Hamburg

Meinem Gnädigsten Herzog
und Herrn

unterthänigst.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Herzog und Herr,

Wann Eurer Herzoglichen Durch-
lauchten in tiefster Ehrfurcht
dieses Buch zu überreichen, und dadurch
ein öffentliches Zeugniß von den reinsten
Empfindungen der unterthänigsten Dank-

barkeit für so mannigfaltige von Eurer Herzoglichen Durchlauchten mir erwiesene Gnadenbezeugungen der Welt vor Augen zu legen, ich mich erkühne; so hoffe ich, daß Eurer Herzoglichen Durchlauchten nach Höchstderoselben weltgepriesenen Landesväterlichen Hulde solches nicht ungnädig aufzunehmen geruhen werden. Wofern ich dem Werke, dessen ersten Theil Eurer Herzoglichen Durchlauchten ich hiemit tiefehrerbietigst zu Füssen lege, etwas zu mehrerer Ausbreitung nüzlicher Kenntnisse beygetragen habe, und noch künftig beytragen werde; so ist es meine Pflicht, zugleich der gelehrten Welt zu sagen, daß nur die gnädigsten Ermunterungen, und huldreichsten Unterstützungen von Eurer Herzoglichen Durchlauchten mich in den

Stand gesezt haben, mit dem von Gott mir anvertrauten Pfunde zu wuchern, und solches zum Dienste meines geliebten Vaterlandes anzuwenden. Das Andenken an diejenige ungemeine Gnade und Hulde, wird bey mir zeitlebens unauslöschlich bleiben, womit Eure Herzogliche Durchlauchten vor zweyen Jahren, bey Gelegenheit eines auswärtigen Rufs mir antragen liessen, Höchstderoselben Dienste und mein Vaterland nicht zu verlassen. Konnte ich gleich gegen die Gnade eines andern Fürsten nicht unempfindlich seyn, der wie Eure Herzogliche Durchlauchten ein grosser Beschützer der Gelehrten und Beförderer der wahren und nüzlichen Gelehrsamkeit ist; so musten mir dennoch die Pflichten gegen meinen gnädigsten Landesherrn

und ersten huldreichsten Beförderer bey so vielen neuen Gnadenbezeugungen heiliger seyn. Und eben diese Pflichten erheischen es von mir, hiemit Rechenschaft abzulegen, wie ich dem von neuen mir damahls gnädigst übertragenen Lehramt genug zu thun bemühet bin, und wie ich den hiesigen Studirenden den Nutzen der Mathematik auch in der Ausübung zu zeigen suche, und dies um so mehr, da ich in Ansehung des letztern einer ganz besondern gnädigsten Unterstützung von Eurer Herzoglichen Durchlauchten ich mich zu erfreuen habe. Diese bestehet in dem Gebrauch derjenigen vortreflichen Instrumente, welche für Höchstderoselben hiesige Akademie von den Aufkünften des in solcher Absicht huldreichst gestifteten Fonds von Jahr zu Jahr angeschaft wor-

worden, und deren Ankaufung Höchst-
dieselben mir zu übertragen gnädigst
geruhet haben. Es sind nicht allein sehr
wenige Privatpersonen, die so kostbare
Instrumente aus eigenem Vermögen an-
schaffen können, sondern es giebt auch we-
nige Akademien, wo dergleichen preis-
würdige öffentliche Anstalten zum Nutzen
der Wissenschaften vorhanden sind. Um
soviel grösser ist die Gnade, welche Eure
Herzoglichen Durchlauchten Höchst-
deroselben Akademie durch diese Stiftung
erwiesen haben: und schon längst habe ich
mir eine Gelegenheit gewünscht, wegen
dieser, sowohl der hiesigen Universität
überhaupt, als auch insbesondre mir er-
wiesenen höchsten Gnade Eurer Her-
zoglichen Durchlauchten meine tief-
unterthänigste Dankbarkeit öffentlich zu

bezeugen. Nie werde ich aufhören, durch den treuesten Eifer, meine Pflichten zu erfüllen, diejenige tiefe Ehrfurcht an den Tag zu legen, mit welcher ich ersterbe

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Herzog und Herr,
Ew. Herzogl. Durchlauchten

Bützow
den 9. April 1767.

unterthänigster treugehorsamster
Knecht
W. J. G. Karsten.

Vorrede.

Eine Abhandlung über die Ursachen, warum die Mathematik in Deutschland von vielen noch für eine entbehrliche Wissenschaft gehalten wird, dürfte vielleicht eine angemessene Einleitung zu einer Schrift seyn, wie diejenige nach meiner Absicht werden soll, wovon ich hiemit den ersten Theil liefere. Allein eine vollständige Ausführung davon würde die Gränzen einer Vorrede überschreiten: deswegen werde ich hier nur soviel davon sagen, als mir der Absicht einer Vorrede gemäß zu seyn scheinet, die eigentlich dahin gehen soll, den Leser davon vorläufig zu unterrichten, was der Schriftsteller in dem Werke selbst zu leisten bemühet gewesen ist. Ich werde mich dabey auf die

vom

Vorrede.

vom H. H. Kästner vor anderthalb Jahren unter dem Titel: Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen, warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnüz gehalten wird, herausgegebene kleine Schrift beziehen, die dasjenige schon grösstentheils enthält, was ich hier sonst weitläuftiger sagen würde.

Man lernt ordentlich von der Mathematik gar nichts, oder doch viel zu wenig, als daß es einen eigentlichen practischen Nutzen bringen könnte. Dies ist die Stelle aus dem Varro, worauf sich die angeführte Kästnerische Schrift beziehet. Vielleicht würden wenigstens einige mehr lernen, wenn man in der Art wie diese Wissenschaft auf Universitäten getrieben wird, einige Aenderungen machte, und die Einrichtung der Lehrbücher selbst in einigen Stücken geändert würde. Ich sage mit Fleis geändert, und nicht: verbessert würde. Denn ich bin keinesweges gesonnen, weder den Lehrern, deren Verdienste bekannt sind, in Ansehung ihres mündlichen Vortrags Fehler beyzumessen, noch auch die mit allgemeinem Beyfall aufgenommenen Handbücher dieser Wissenschaft zu tadeln. Vielmehr bin ich überzeugt, daß es ganz unnöthig sey, ihnen ein neues an die Seite zu setzen, wenn man sich keine andre Absicht vorsetzet, als die ein Compendienschreiber freylich sonst eigentlich vor Augen haben soll. Ein Compendium soll die Ersten Gründe der Wissenschaft, die

es vorträgt, gründlich, deutlich, vollständig, und dabey so kurz als es sich bey diesen dreyen genannten Eigenschaften thun läßt, abhandeln. Nun hat freylich die Mathematik den Vorzug, daß sich in derselben eine angenehme Kürze mit besserm Erfolg, als in den übrigen Wissenschaften anbringen läßt. Man kann ungemein viel mit wenig Worten, ohne Nachtheil der Deutlichkeit sagen, und die besten Schriftsteller haben sich allemahl einer solchen Kürze beflissen. Die strenge synthetische Methode, die sich hier vorzüglich anbringen läßt, trägt dazu ungemein vieles bey. Allein fast glaube ich, daß dies eine von den Ursachen sey, warum die allermeisten, welche auf Universitäten die Mathematik treiben, entweder gar nichts, oder doch viel zu wenig davon lernen, als daß es einen practischen Nutzen bringen könnte. Es giebt in der That nicht viele recht systematische Köpfe, und wenn solche, die nicht gleichsam von Natur schon Geometer sind, noch dazu mit einer Menge von Sachen überhäuft werden, die sie in kurzer Zeit lernen sollen, so werden sie bald ganz verwirrt, verdrieslich, und lassen alles liegen. H. H. Kästner schreibt in dem angeführten Comment. auf der 5 S. folgendes: „ich kann den Fleis und die Gemüthsgaben derer „nicht für ganz schlecht erklären, die sich in der kurzen Zeit eines halben Jahrs nicht eine solche Menge von Begriffen und Sätzen der reinen Mathematik, vollkommen bekannt machen können, als „zu fertiger Anwendung nöthig ist.“ Wer nur einigermassen den Umfang dieser Wissenschaft nach

ihrem gegenwärtigen Zustande kennet, der wird ihm nicht allein in diesem Stücke, sondern auch in demjenigen beypflichten, was er gleich nachher von der angewandten Mathematik saget: „Noch eine „gröſſere Mannigfaltigkeit von Begriffen und Leh„ren enthält die angewandte Mathematik, auf die „unsre Studirende doch auch noch ein halbes Jahr „wenden u. s. f. Dreyzehn oder vierzehn Wissen„schaften gehören hieher, die sich allenfalls in drey „oder vier Hauptabtheilungen bringen liessen, de„ren jede durch Gründe und Inhalt sich von den „andern sehr unterscheidet. Nur alsdann, wenn „auf jede dieser Abtheilungen ein halbes Jahr ge„wandt würde, könnte man sich von ihr eine zum „practischen Gebrauch näher anleitende Kenntnis „erwerben.„

Hat dies alles seine Richtigkeit, so weis ich nicht, ob es nicht gerathen sey, in den gewöhnlichen halbjährigen Collegiis lieber weniger Sachen, eben diese Sachen aber ausführlicher vorzutragen, damit die Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten (und sind deren wohl nicht gewöhnlich die meisten?) Zeit gewönnen nachzukommen. Wäre es ferner, ebenfalls wegen der Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten, nicht besser, die für Meister in der Mathematik sonst allerdings angenehme Kürze in den mathematischen Compendien zu vermeiden? Die meisten meiner Leser werden vermuthlich das lezte verneinen, wenn sie gleich das erste noch wohl zugeben. Die Gründe, warum man dies verneinen wird,

sind

sind mir bekannt, und ich gestehe gern, daß diese Gründe ihr Gewicht haben. Indessen ist soviel gewis, daß ein etwas ausführlicher und mehr auseinander gesezter Vortrag den meisten Anfängern angenehm seyn werde, und das vornemlich aus der Ursache, weil es ihnen die Mühe sehr erleichtert, das in den Lehrstunden angehörte für sich zu wiederholen. Man wende nicht ein, daß auf solche Art der mündliche Vortrag ganz unnöthig seyn werde, wenn alles schon im Buch stehe, was der Lehrer von der Sache sagen könne. In den mathematischen Collegiis kommt es nach meiner Erfahrung nicht so sehr darauf an, daß der Lehrer viel mehr vortrage, als was im Buch stehet, sondern vornemlich darauf, daß er den Zuhörern das Buch selbst nur verständlich und geläufig mache. Die allerwenigsten Zuhörer fassen dasjenige, was im Buch entweder gar nicht oder so kurz stehet, daß der mündliche Vortrag vieles zur Ergänzung beyfügen muß.

Vielleicht ist dies noch nicht genug, die Art des Vortrags zu rechtfertigen, welche ich in einer Schrift erwählt habe, wovon ich wenigstens einige Theile bey meinen Akademischen Vorlesungen zum Grunde legen werde. Wenn ich aber gleich hierin gefehlet habe, so hoffe ich doch daß Kennern mein Plan nicht ganz misfallen werde, wenn sie denselben aus folgendem Gesichtspunct betrachten wollen. Mir ist kein neueres Lehrbuch der gesamten Mathematik, als die Wolfischen Elementa bekannt,

Vorrede.

kannt, worin alle Theile der praktischen Mathematik vollständig vorgetragen sind. (Ich rede hier, wie aus der Anführung der Wolfischen Elementorum erhellet, von keinem Compendio der angewandten Mathematik; daher wird man mir das Kästnerische Handbuch nebst andern nicht entgegen setzen.) Ein Buch aber, welches zwischen einem eigentlichen Compendio und einem ganz ausführlichen Lehrbegrif das Mittel hielte, dürfte wohl zu allgemeiner Verbreitung so nüzlicher Kenntnisse, als die Mathematik lehret, das seinige beytragen. Ich fange mit diesem ersten Theil ein Buch an, dessen Einrichtung wenigstens nach meiner Absicht hierauf vorzüglich abzwecket. Man sehe demnach dies Buch als ein solches an, welches vornemlich für diejenigen geschrieben ist, die durch eigenen Fleis sich vollständigere Kenntnisse erwerben, und nicht bey den ersten Anfangsgründen stehen bleiben wollen; so wird man es, wie ich hoffe, dieser Absicht angemessen finden. Ich werde am besten, bey der Ausgabe eines jeden neuen Theils darüber mich näher erklären können, auf was Art ich jedesmahl dieser Absicht ein Genüge zu leisten suche. Deswegen begnüge ich mich hier davon das allgemeine gesagt zu haben. Nur muß ich noch mit wenigen etwas von diesem ersten Theil beyfügen.

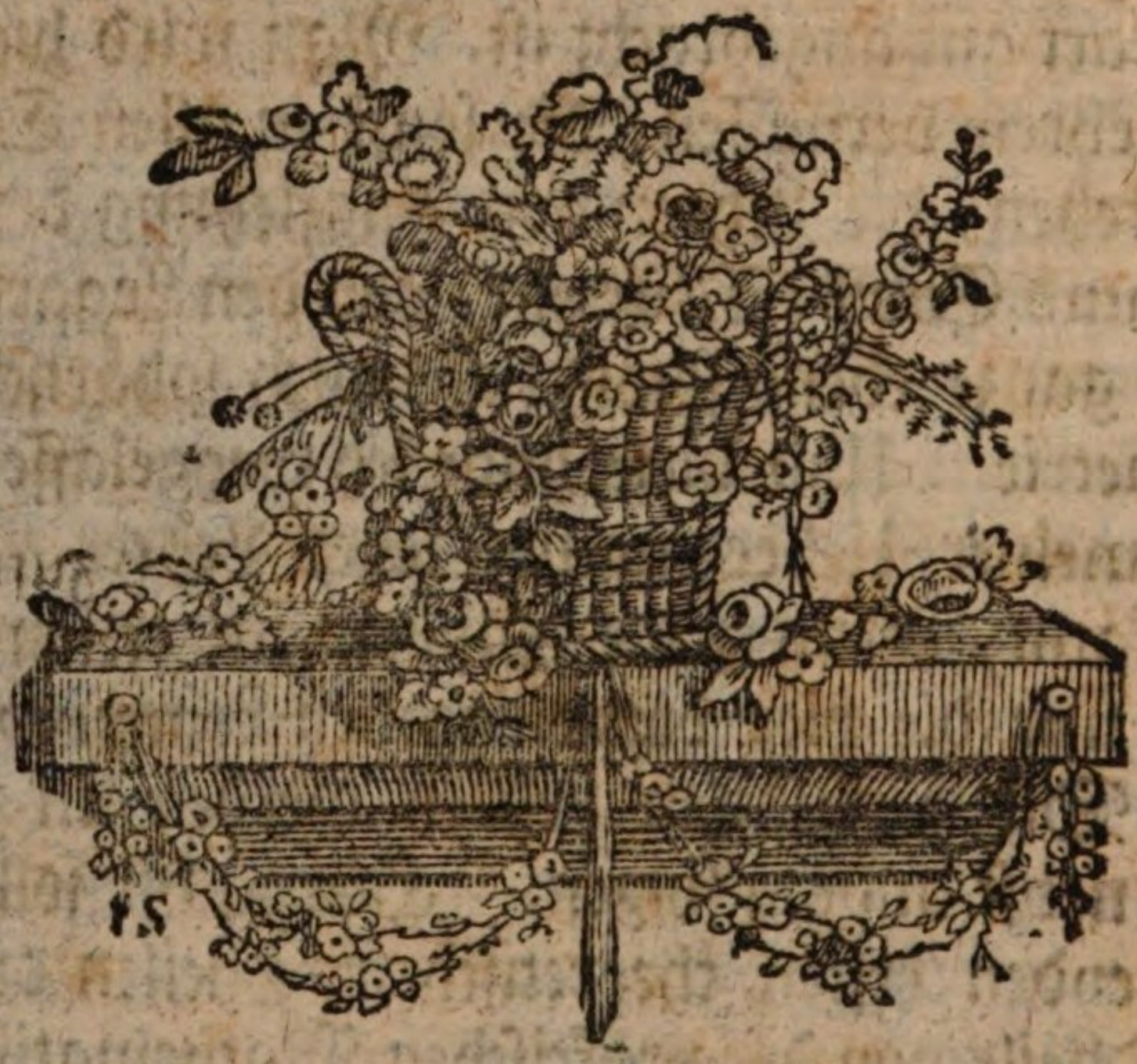
Ich bin es zufrieden, wenn man ihn, als ein Compendium der theoretischen Elementar-Mathematik betrachten will: allein ich bitte ihn von dieser Seite nicht allein zu beurtheilen, sonst wird man

den

den Vortrag viel zu weitläuftig finden. Man wird Wiederholungen bemerken, die ich leicht hätte vermeiden können, wenn ich mich allein der strengen synthetischen Lehrart hätte bedienen wollen, wie ich es in meiner im Jahr 1760 herausgegebenen Matheſi Theoretica gethan habe. Dies habe ich hier denen zu gefallen nicht thun wollen, die mein Buch brauchen wollen, durch eigenen Fleis sich weiter zu helfen: ich weis nicht, ob ich hinzu setzen darf, daß ich es auch deswegen nicht habe thun wollen, weil bey den allerwenigsten Anfängern diese Lehrart gut angebracht ist. Man wird hier überdem Lehren vermissen, die sonst in allen Compendien stehen, die Lehren von Ausziehung der Quadrat- und Cubik-Wurzeln, von den Logarithmen, ja die ganze ebene sowohl als auch sphärische Trigonometrie. Und diese habe ich weggelassen, weil nach meiner Ueberzeugung jeder Lehrer zufrieden seyn kann, wenn seine Zuhörer im ersten halben Jahr nur die hier vorgetragenen Lehren wohl fassen. Die genannten Lehren werden im zweyten Theil nebst andern folgen. Hiernächst sollen nach den beyden ersten theoretischen Theilen drey oder vier Theile von der praktischen Mathematik folgen, und zwar nach den vom H. H. Kästner in der obenangeführten Schrift gemachten Abtheilungen. Ich werde hier alles ausführlich vortragen, was davon ohne Hülfe der eigentlichen Algebra, die einfachen und quadratischen Gleichungen ausgenommen, gesagt werden kann. Hierauf wird die höhere sowohl theoretische als praktische Mathematik

folgen, so daß das ganze Werk, wenn ich es mit göttlicher Hülfe zu Ende bringen sollte, auf zwölf und vielleicht mehr Theile etwa von der Grösse, wie der gegenwärtige ist, anwachsen wird.

Bützow im April des Jahrs 1767.



Nach=

Nachricht

wegen der zweyten Auflage.

Bey dieser Auflage ist die Einrichtung des Buches im Ganzen nicht geändert worden, damit dieser erste und die folgenden Theile des **Lehrbegriffes der gesammten Mathematik**, so wie sie unter diesem Titel bisher nach einander bis zum achten Theil im Druck erschienen sind, nach wie vor ein eigenes Werk für sich ausmachen. Wenn also auch vielleicht künftig von dem zweyten, und den folgenden Theilen eine neue Auflage erfordert werden mögte; so wird ebenfalls weiter keine Aenderung des Plans im Ganzen gemacht werden. Die bisher von mir in deutscher Sprache heraus gegebenen mathematischen

Schriften haben, wie aus andern Nachrichten schon bekannt ist, nunmehro nach ihrer äussern Einrichtung die Aehnlichkeit mit den Wolfischen Werken erhalten, daß ein von dem gröfsern Lehrbegriffe verschiedenes kürzeres Werk unter dem Titel: **Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften**, von mir ist aufgesetzt worden, und daß überdem noch ein **Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe** als ein Handbuch für die ersten Anfänger hinzugekommen ist. Hier habe ich also nur noch mit wenigen zu bemerken, was ich nach meinen jetzigen Einsichten in diesem ersten Theile des Lehrbegriffes an einzelnen Stellen zu ändern für nöthig gefunden habe. Im V. Abschnitt der Rechenkunst sind die Beweise einiger Lehrsätze etwas mehr verkürzt, und wie ich glaube, eben dadurch noch deutlicher und einleuchtender gemacht worden. Meine neuesten Versuche, die Theorie von den Parallellinien mehr ins Licht zu setzen, scheinen einigen Beyfall gefunden zu haben: deßwegen habe ich auch hier davon Gebrauch gemacht. In der Geometrie ist sonst keine erhebliche Aenderung gemacht, nur der VI. Abschnitt, welcher die allgemeinen Lehren von den Verhältnissen und Proportionen enthält, ist etwas anders ausgearbeitet worden. Wegen der vielen Anwendungen, die man von diesen

Lehren

Lehren auch in der höhern Mathematik macht, schien es mir nöthig und nützlich, die hieher gehörigen Grundbegriffe möglichst deutlich ins Licht zu setzen. Dieser und noch einiger andrer nicht so beträchtlicher Aenderungen ungeachtet ist doch die Ordnung der Paragraphen nicht verrückt worden, damit die Anführungen in den folgenden Theilen brauchbar bleiben mögten: nur einige wenige, die auch in folgenden am wenigsten angeführt werden, haben eine andre Zahl erhalten. Den Beweisen in der Lehre vom Kreise, auch in der körperlichen Geometrie den Beweisen der Lehrsätze vom Cylinder dem Kegel und der Kugel, habe ich hier nach dem Archimedes die apogogische Form gelassen: in den Anfangsgründen haben sie die Form der directen Beweise erhalten. So findet nun der Liebhaber der Mathematik, wenn er dergleichen Beweise in beyden Werken zusammen hält, Proben davon, wie sich ähnliche Lehren, die in der höhern Geometrie freylich kürzer vermittelst der Rechnung des unendlichen vorgetragen werden, auch mit Vermeidung der Begriffe des Unendlichen nach Art der Alten vortragen lassen. Durch Uebungen dieser Art gelangt der angehende Geometer vornemlich zur Fertigkeit im scharfen Nachdenken. Sonst habe ich auch noch gesucht, hie und da den deutschen Ausdruck mehr zu be-

Nachr. wegen der zweyten Auflage.

richtigen, und die Rechtschreibung mit den übrigen Theilen völlig in Uebereinstimmung zu bringen. Die ersten Theile sind nach einer reinen Abschrift gedruckt, die ich nicht selbst geschrieben hatte, und es hat anfangs auch nicht immer einerley Person die Correctur gehabt: daher sind in der ersten Ausgabe kleine Verschiedenheiten in der Rechtschreibung entstanden.

Halle im December des Jahrs 1781.

Inhalt

Inhalt des ersten Theils.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der I. Abschnitt. Von einigen Eigenschaften der Zahlen und ihrer Bezeichnung durch Ziffern.

Der II. Abschnitt. Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

Der III. Abschnitt. Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

Der IV. Abschnitt. Von der Division mit ganzen Zahlen und dem Ursprung der Brüche.

Der V. Abschnitt. Von dem Unterscheid der Prim-Zahlen und zusammen gesetzten Zahlen.

Der VI. Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

Der VII. Abschnitt. Von den Decimal-Brüchen insbesondre.

Der VIII. Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Der IX. Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Der X. Abschnitt. Von der Regel Detri und ihrer Anwendung.

Der Geometrie erster Theil.

Die ebene Geometrie.

Der I. Abschnitt. Von den graden Linien und Winkeln.

Der II. Abschnitt. Vom Umfang der ebenen Figuren überhaupt und insbesondre von der Kreislinie.

Der III. Abschnitt. Von den Dreyecken und Parallellinien.

Der IV. Abschnitt. Von den Parallelogrammen und ihre Vergleichung sowohl unter sich, als auch mit den Dreyecken.

Der

Inhalt.

Der V. Abschnitt. Vom Kreise und den regulären Polygonen.
Der VI. Abschnitt. Allgemeine Lehren von den Verhältnissen und Proportionen.
Der VII. Abschnitt. Von der Aehnlichkeit der Figuren.
Der VIII. Abschnitt. Von den zusammen gesetzten Verhältnissen.
Der IX. Abschnitt. Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

Anwendung der Rechenkunst auf die ebene Geometrie.

Der X. Abschnitt. Von der Ausmessung grader Linien und Winkel.
Der XI. Abschnitt. Von der Ausmessung ebener Figuren.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometrie nebst Berechnung der körperlichen Grössen.

Der XII. Abschnitt. Von den verschiedenen Lagen grader Linien und ebener Flächen gegen andre ebene Flächen.
Der XIII. Abschnitt. Von den Prismatischen Körpern und Pyramiden.
Der XIV. Abschnitt. Vom Cylinder und Kegel.
Der XV. Abschnitt. Vom Inhalt der Kugel.

Anfangs-

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der I. Abschnitt.

Von einigen Eigenschaften der Zahlen, und ihrer Bezeichnung durch Ziffern.

1 §.

Wofern es gewiß ist, daß wir von manchen Sachen Begriffe haben, die wir durch keine andre Worte deutlicher machen können, als durch eben diejenigen, welche gewöhnlich gebraucht werden, diese Sache anzudeuten; so gehört der Begrif von einer Anzahl unstreitig mit zu dieser Classe. Die Wörter; **Vielheit, Menge, Zahl, Anzahl** bedeuten einerley. Wer die Sprache versteht, weiß, was diese Wörter sagen wollen. In soferne würde es also eine unnöthige, ja vergebliche Mühe seyn, wenn man suchen wollte, den Begrif von einer Zahl mehr aufzuklären. Inzwischen kann man die verschiedenen Fälle, wo man mehrere Dinge zusammenzählt, gegeneinander halten, und auf solche Art ein für allemahl fest setzen, wie die Wörter und Redensarten verstanden werden müssen, die bey diesem Geschäfte gebraucht werden. Dies ist

um deswillen nöthig, weil die Rechenkunst eine Wissenschaft ist, die sich mit der Vergleichung verschiedener Zahlen beschäftigen und die Regeln vortragen soll, nach welchen aus gegebenen und bekannten Zahlen andre unbekannte gefunden werden können.

2 §.

Wenn man mehrere Dinge zusammenzählt, so sind es allemahl entweder würklich Dinge von einerley Art, oder man sieht wenigstens beym Zusammenzählen auf ihre Verschiedenheit nicht. Bey der Frage: **wieviel?** wird deswegen allemahl zugleich ausgedrückt, was es für Dinge seyn sollen, deren Anzahl man wissen will. Sind Personen von beyderley Geschlecht in einem Zimmer bey einander, so muß man unstreitig die Frage: wie viele Mannspersonen sind da? anders beantworten, als die Frage: wieviele Personen überhaupt sind gegenwärtig? Es müssen demnach die zusammengezählten Dinge, in so ferne sie eine Zahl ausmachen sollen, von einerley Art seyn.

3 §.

Oft kommt auch die Grösse der zusammengezählten Dinge in Betrachtung, obgleich eben nicht allemahl, und sodann müssen die zusammengezählten Dinge, welche die Zahl ausmachen sollen, auch gleich groß seyn. Bey der Frage: **wieviel?** wird auch dies gemeiniglich ausgedrückt. Wir haben nemlich in allen Sprachen eine Menge von Worten, welche nicht allein die Art der Dinge ausdrücken, zu welcher die Sache gehört, sondern zugleich eine bestimmte Grösse derselben. Alle Worte, welche die verschiedenen Maasse, Gewichte, Münzen, u. s. f. ausdrücken, gehören hieher. So ist eine Elle eine Länge,

die

die ihre bestimmte Grösse hat, ein Pfund ist ein Gewicht von einer bestimmten Grösse; Thaler, Gulden, Groschen, u. s. f. sind Münzen, die ihren bestimmten Werth haben. Frägt man nun: wieviele Pfunde wiegt diese Waare? wieviele Ellen ist dieses Stück Tuch lang? u. s. f. so verstehet es sich von selbst, daß die Pfunde, oder Ellen, welche man zusammenzählen soll, gleich groß seyn müssen.

4 §.

Man sieht aber beym Zusammenzählen entweder alle die zusammengezählten Dinge für sich betrachtet als ganze an; oder man zählt gleiche Theile eines Ganzen zusammen. Das Ganze, das man entweder selbst, oder dessen Theile man mehrmahl zusammenzählt, heißt die **Einheit**. Eine Menge ganzer Einheiten heißt eine **ganze Zahl**, und eine Menge gleicher Theile der Einheit wird eine **gebrochne Zahl**, oder ein **Bruch** genannt. Dieser Unterscheid ist in der Natur der Zahlen selbst eigentlich nicht gegründet. Eine und eben dieselbe Zahl läßt sich als eine ganze oder gebrochene Zahl ansehen, nachdem man die zusammengezählten Dinge entweder für sich als Ganze, oder als Theile eines andern Ganzen betrachten will. Die Zahl zwey **Mark**, ist eine ganze Zahl, wenn man ein Mark für sich als ein Ganzes ansieht. Die Zahl zwey **Drittheil** eines Thalers ist eine gebrochene Zahl, weil man die zusammengezählten Dinge als Theile eines andern Ganzen, nemlich eines Thalers, betrachtet. Beyde Zahlen sind an sich einerley, weil ein Mark mit einem Drittheil eines Thalers einerley ist. Es wird vor der Hand nur von den ganzen Zahlen die Rede seyn, wenn das Wort Zahl schlechthin gebraucht wird.

a.

5 §.

Man kann von Eins anfangen fort zu zählen, ohne daß man dabey eine gewisse Art von Einheiten in Gedanken hat. Man kann vorwärts und rückwärts zählen, und die Zahl in Gedanken vermehren, oder vermindern. Man kann ein Paar Zahlen vergleichen und prüfen, ob die eine mehr oder weniger Einheiten enthalte, als die andre, so daß man bey diesem Geschäfte die besondere Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten gar nicht in Betrachtung ziehet. Eine Zahl, bey der die besondre Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten gar nicht in Betrachtung kommt, heißt eine abstracte Zahl, in den gewöhnlichen Rechenbüchern heißt sie eine ungenannte Zahl. Eine concrete, oder genannte Zahl ist eine solche, die eine gewisse Menge von Einheiten einer gewissen Art ausdrückt. Die Zahl drey überhaupt ist eine ungenannte Zahl, die Zahl drey Pfund aber eine genannte Zahl.

6 §.

Will man ein Paar genannte Zahlen mit einander vergleichen, so müssen die Einheiten der einen mit den Einheiten der andern von einerley Art seyn, widrigenfalls findet keine Vergleichung statt. Man kann weder sagen, daß drey Pfund mehr, noch daß sie weniger, als zwey Ellen sind. Man kann aber sagen, drey Pfunde sind mehr, als zwey Pfund. Im Gegentheil lassen sich alle ungenannte Zahlen mit einander vergleichen, weil die zusammengezählten Einheiten bey allen ungenannten Zahlen als Dinge von einerley Art anzusehen sind, indem man keine besondre Art derselben in Gedanken hat.

7 §.

7 §.

Ein paar Zahlen mit einander vergleichen heißt nemlich nichts anders, als eine Prüfung anstellen, ob beyde gleich, oder ungleich groß sind. Ueberhaupt aber kann man eine solche Vergleichung mit allen Dingen anstellen, denen man eine Grösse zuschreibt, und man hält die Dinge für gleiche Dinge, wenn eines in Absicht der Grösse mit dem andern einerley ist, und also in Absicht der Grösse an die Stelle des andern gesetzt werden kann. Eins ist aber dem andern ungleich, wenn beyde in Absicht der Grösse nicht einerley sind. Ein Paar ungenannte Zahlen werden demnach gleich groß seyn, wenn sie einerley Menge von Einheiten enthalten, und sie werden ungleiche Zahlen seyn, wenn die eine nicht eben die Menge von Einheiten, als die andre ausdrückt. Weil bey den genannten Zahlen die Grösse und übrige Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten selbst mit in Betrachtung kommt; so wird bey diesen nicht allein erfordert, daß einerley Menge von Einheiten in beyden vorhanden sey, sondern es müssen auch überdem die zusammengezählten Einheiten selbst einerley seyn, wenn beyde Zahlen gleich groß seyn sollen. So sind drey Centner und drey Pfunde der Zahl nach einerley, aber nicht dem Gewichte nach; deßwegen sind es zwar gleiche Zahlen, als Zahlen betrachtet, aber nicht gleiche genannte Zahlen.

8 §.

Bey der Prüfung, ob ein Paar Grössen einander gleich, oder ungleich sind, verfahren wir allemahl nach gewissen Grundsätzen, die einem jeden bekannt sind, und deßwegen nur verdienen besonders angemerkt zu werden, weil man in dieser Wissenschaft

den höchsten Grad der Gewißheit zu erhalten sucht. Sie könnten hier wegbleiben, und dennoch der ganze folgende Vortrag darauf gebauet werden. Allein es hat unstreitig seinen Nutzen, wenn man die Gründe genau kennet, wovon alle Lehren einer Wissenschaft abhängen. Sind diese Gründe von der Beschaffenheit, daß sie Niemand läugnen, und ihre Wahrheit auch nicht im geringsten in Zweifel ziehen kann; so muß alles, was daraus richtig geschlossen wird, eben so unläugbar seyn, als die Grundsätze selbst sind. Folgenden dreyen Sätzen wird man eine so unläugbare Gewißheit schwerlich absprechen.

9 §.

Eine jede Grösse ist sich selbst gleich. Dies will so viel sagen: Eine Grösse kann nicht zugleich diese, und eine andre seyn, weil es überhaupt nicht möglich ist, daß etwas zugleich seyn, und nicht seyn könne.

Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich. Dies ist schon eine Folge des vorigen. Alle Theile zusammen genommen sind dasjenige, was wir das Ganze nennen. Wäre das Ganze nun allen seinen Theilen zusammen genommen ungleich, so wäre es sich selbst ungleich: es würde zugleich dies Ganze, und auch nicht dies Ganze seyn.

Ein Theil, oder einige Theile allein genommen, sind nicht so groß als das Ganze. Denn das Ganze, oder alle Theile zusammen genommen, können mit einem, oder einigen Theilen allein genommen, der Grösse nach nicht einerley seyn.

10 §.

In der That geben die beyden ersten Sätze ein Paar Kennzeichen der Gleichheit, und der dritte ein Kennzeichen der Ungleichheit ab. Der Begrif der Gleichheit und Ungleichheit ist viel zu allgemein, als daß es möglich wäre, eine kurze, und zugleich so bestimmte Erklärung davon zu geben, die einen jeden in den Stand setzte, die Anwendung davon allemahl ohne Schwierigkeit zu machen, wenn die Frage vorkommt, ob ein Paar Grössen gleich oder ungleich sind? Ja diese Sätze selbst sind noch viel zu allgemein, und es muß noch eine Menge anörer Regeln, die genauer bestimmt sind, daraus hergeleitet werden, wenn man in jedem vorkommenden Fall auf dem kürzesten Wege die Vergleichung anstellen will. Eben dies ist der wichtigste Vorwurf der Mathematischen Wissenschaften. Bey diesem Geschäfte ist man zugleich auf allerhand Hülfsmittel bedacht gewesen, die Weitläuftigkeit der Worte zu vermeiden, um die Aufmerksamkeit desto mehr auf die Sache zu lenken. Die bekannten Ziffern 1, 2, 3, u. s. f. geben schon die besten Exempel davon ab, daß es nicht allein möglich, sondern in vieler Absicht bequem und nützlich sey, statt der gewöhnlichen Worte viel kürzere geschriebene Zeichen zu gebrauchen. Man bedienet sich in der Mathematik dieses Zeichens (=) statt des Worts gleich, und setzt es zwischen den Grössen, deren Gleichheit man andeuten will. Ausdrücke von dieser Art:

Ein Pfund = sechzehn Unzen
Eine Elle = zwey Fuß u. s. f.

bedeuten demnach eben so viel, als wenn man geschrie-

ben hätte: Ein Pfund ist gleich sechzehn Unzen, eine Elle ist gleich zween Füßen.

11 §.

Aus folgenden zweenen Sätzen:

Eine Elle = zwey Fuß,
zwey Fuß = vier und zwanzig Zoll,

würde man ohne Bedenken diesen dritten Satz als eine Folge herleiten: Eine Elle = vier und zwanzig Zoll. In der That gründet man diesen Schluß auf folgenden allgemeinen Grundsatz:

Wenn zwo Grössen einer und eben derselben dritten gleich sind: so sind sie auch unter sich gleich.

Dies ist ein neues Kennzeichen der Gleichheit, dessen man sich bedienet, gewisse Grössen vermittelst einer dritten zu vergleichen. Man kann hiemit folgenden Satz verbinden:

Wenn zwo Grössen so groß sind, als zwo andre gleiche Grössen, so sind sie unter sich gleich groß.

Dieser letzte dienet in solchen Fällen zur Verkürzung, wo man den vorigen zweymahl brauchen müste.

12 §.

Sind zwo Grössen einander ungleich: so heißt allemahl die eine von beyden die grössere, und die andre die kleinere. Es wird nemlich die eine von beyden einen Theil, der so groß ist, als die andre ganz genommen, und überdem noch etwas mehr enthalten. Diese heißt die grössere, und die andre, welche einem Theil der ersten gleich ist, die kleinere. Folgende Grundsätze dienen als Kennzeichen des Grössern und Kleinern.

a.

Jeder

Jeder Theil des Ganzen allein, oder auch einige Theile des Ganzen allein genommen, sind kleiner, als das Ganze.

Das Ganze ist grösser, als jeder Theil desselben allein, oder einige Theile desselben allein genommen.

13 §.

Die Ungleichheit zwoer Grössen deutet dies Zeichen ($>$) an, welches man zwischen ihnen so setzet, daß die Oefnung gegen die grössere, und die Spitze gegen die kleinere zeigt. Wenn man also schreibt:

Ein Centner $>$ ein Pfund

Ein Pfund $<$ ein Centner;

so ist dies einerley, und bedeutet, daß ein Centner mehr als ein Pfund, oder ein Pfund weniger, als ein Centner sey.

Aus diesen zweenen Sätzen:

Ein Centner $>$ ein Pfund

Ein Pfund = sechzehn Unzen,

wird man wiederum ohne Bedenken den dritten Satz schliessen:

Ein Centner $>$ sechzehn Unzen.

Der Schluß gründet sich auf die allgemeine Regel:

Was grösser ist, als eine von zwoen gleichen Grössen, das ist auch grösser, als die andre.

Ist dies allemahl richtig, so wird man auch folgende Regel gelten lassen:

Was kleiner ist, als eine von zwoen gleichen Grössen, das ist auch kleiner, als die andre.

Um so mehr werden auch diese Regeln unläugbar richtig seyn:

Was grösser ist, als die grössere von zwoen ungleichen Grössen, das ist auch grösser, als die kleinere.

Was kleiner ist, als die kleinere von zwoen ungleichen Grössen, das ist auch kleiner, als die grössere.

14 §.

Wir urtheilen in unzähligen Fällen im gemeinen Leben nach diesen Grundregeln, ob wir gleich eben nicht gewohnt sind, sie in der Allgemeinheit auszudrücken, in welcher sie hieher gesetzet sind. Aber eben hiedurch werden sie in der ganzen Mathematik brauchbar. Es sind noch verschiedene dergleichen allgemeine Grundsätze übrig, die besonders angemerkt zu werden verdienen, und diese werden nach einander vorkommen, so wie die verschiedenen Methoden werden erklärt werden, wie man aus gegebenen Grössen andre finden kann, die man in der Rechenkunst zuerst auf die Zahlen anwendet. Es sollen deßwegen nunmehro zuförderst die Zeichen beschrieben werden, welche man statt der gewöhnlichen Worte gebraucht, die Zahlen dadurch auszudrücken. Diese Zeichen werden Ziffern genannt. Man setzt sie alle aus zehn einfachen Ziffern zusammen, deren Bedeutung einem Jeden von Jugend auf bekannt wird, der es lernt, wie man die ausgesprochenen Worte in Schriften bezeichnet. Es sind folgende:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Das Zeichen 0 ist eigentlich das Zeichen einer leeren Stelle, die vermöge des Gesetzes, nach welchem man eine Ziffer zusammensetzt, keine von den übrigen einfachen Ziffern einnehmen kann.

15 §.

Die Art, wie aus diesen einfachen Ziffern alle übrige zusammengesetzt werden, lernt man am besten verstehen, wenn man auf folgende Umstände acht hat, welche beym gewöhnlichen zählen beobachtet werden. Man zählet fort von eins bis zehn, und fängt sodann wieder von forne an zu zählen, da dann die ersten zehn Zahlen ihre eigene Nahmen haben. Nun zählt man weiter eins und zehn, zwey und zehn, welche Ausdrücke verkürzt in unsrer Sprache so lauten: eilf, zwölf. Bey den folgenden Ausdrücken, drey und zehn, u. s. f. läßt man das Wort und weg, und zählet so fort, bis man auf zehn und zehn oder zweymahl zehn kommt. Zur fernern Abkürzung sagt man zwanzig, statt zweymahl zehn, dreißig, statt dreymahl zehn, u. s. f. bis auf zehn mahl zehn, oder hundert, da man dann wiederum von forne an zählt: hundert und eins, u. s. f. bis zweyhundert, dreyhundert, u. s. f. da dann aufs neue folgende Worte zur Verkürzung gebraucht werden.

Man spricht aus	durch das Wort
zehn mahl hundert	tausend
tausend mahl tausend	Million
tausend mahl tausend Millionen	Billion
tausend mahl tausend Billionen	Trillion
tausend mahl tausend Trillionen	Quadrillion

u. s. w.

Um nun aber dasselbe durch die geschriebenen Ziffern auszudrücken, was man bey den Worten beobachtet, hat man folgendes Gesetz angenommen.

Man schreibt die Ziffern von der rechten gegen die linke Hand, und läßt jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmahl mehr bedeuten, als

in

in der nächstvorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, setzt man die so genannte Null.

Auf die Art bekommt jede Ziffer, ausser dem eigenthümlichen Werth, den sie schon ausdrücken würde, wenn sie allein stünde, noch einen andern von der Stelle, die sie unter den übrigen einnimmt.

16 §.

Rechnet man also die Stellen von der rechten gegen die linke Hand: so bedeutet die Ziffer 1

		und man schreibt
in der ersten Stelle	eins	1
" " zweyten "	zehn	10
" " dritten "	hundert	100
" " vierten "	tausend	1000
" " fünften "	zehntausend	10000
" " sechsten "	hunderttausend	100000
" " siebenden "	eine Million	1000000
" " achten "	zehn Millionen	10000000

Hieraus ist leicht abzunehmen, wie es mit den übrigen Ziffern nach eben der Regel zu halten sey. Stünde die Ziffer 2 allenthalben da, wo die Ziffer 1 steht; so wären ihre Werthe diese: zwey, zwanzig, zweyhundert, zweytausend, zwanzigtausend, zweyhunderttausend, zwey Millionen, zwanzig Millionen. Es bestehen demnach alle zusammengesetzte Ziffern aus einfachen Ziffern verschiedener Ordnungen. Die Ziffern in der ersten Stelle bedeuten einfache Einheiten. Die Ziffern in der zweyten Stelle oder der ersten nach den Einern, bedeuten zehnfache Einheiten, und gehören zur ersten Decimal-Ordnung. Eben so gehören die Ziffern in der dritten Stelle oder der zweyten nach den Einern; zur

zwey-

zweyten Decimal-Ordnung u. s. w. allemahl von der Rechten gegen die Linke gerechnet.

17 §.

Ohne Zweifel hat man Anfangs auch die geschriebenen Ziffern von der Rechten gegen die Linke zu gelesen. Die meisten Morgenländer sind überhaupt gewohnt gewesen so zu schreiben, und die gewöhnliche Meinung ist, daß wir diese Ziffern von den Arabern bekommen haben. Wollte man diese Regel in der Aussprache beobachten, so würde es nun weiter keine Schwierigkeit haben, jede geschriebene zusammengesetzte Ziffer auszusprechen. Es würde z. E. die Ziffer:

4275136

so zu lesen seyn: Sechs und dreißig und hundert und fünftausend, und siebenzigtausend und zweyhunderttausend, und vier Millionen.

Es hat aber auch keine grössere Schwierigkeit, die Ordnung umzukehren, und nach der Art, wie wir zu lesen, und zu schreiben gewohnt sind, von der Linken gegen die Rechte zu lesen. Hiebey muß man nur zuförderst die Stellen von der Rechten gegen die Linke zählen, damit man wisse, in welcher Stelle die letzte Ziffer zur Linken befindlich sey, indem sie hiedurch ihren Werth bekommt. Damit man sich nun in der Aussprache desto weniger versehe, theile man die ganze Ziffer, von der Rechten gegen die Linke zu, in Classen, so daß jede Classe sechs Ziffern enthalte, da es dann gleichviel ist, wieviel Ziffern die letzte zur linken bekomt. Man setze oberwärts an der siebenten Ziffer einen Strich (′) an der dreyzehnten zwey Striche (″) u. s. f. so weiß man, wo die Millionen, Billionen, u. s. f. anfangen; da denn die übrige Aussprache sich nach der Regel des 15 §. leicht ergiebt.

18 §.

18 §.

Man hat aber dabey in der Aussprache die öftere Wiederholung eines und eben desselben Worts: Million, Billion, u. s. f. vermeiden wollen, die bey einer ganz genauen Beobachtung der Regel in der Aussprache erforderlich seyn würde: deßwegen spricht man allemahl eine ganze Classe von sechs Ziffern auf einmahl aus, bevor man die Millionen, Billionen u. s. f. nennt. Aber auch bey der Aussprache einer solchen ganzen Classe würde das Wort: tausend, oft dreymahl müssen genannt werden. Deswegen läßt man es, um die Aussprache noch mehr abzukürzen, auch so lange weg, bis es zum drittenmahl gehöret werden sollte. Und da dies allemahl in der Mitte einer jeden Classe geschehen müste; so kann man eine jede Classe durch ein Comma (,) in zwo Hälften theilen, und das Comma durch tausend aussprechen. Nun kommt es nur darauf an, daß man eine Ziffer aussprechen könne, die aus dreyen einfachen zusammengesetzt ist, so kann man jede andre aussprechen. Am natürlichsten würde man bey der uns gewöhnlichen Art, von der Linken gegen die Rechte zu lesen, zuerst die Hunderte, dann die Zehner, und zuletzt die Einer, mithin die Ziffer 365 so aussprechen: dreyhundert und sechzig und fünf. Allein es ist durch den Redegebrauch eingeführt, daß man die Einer vor den Zehnern ausspricht, also die obige Ziffer so liest: dreyhundert und fünf und sechzig. Hätte man also die Ziffer:

$$75''''840{,}937'''528{,}296''364{,}709'007{,}283$$

welche nach obiger Vorschrift abgetheilt ist: so würde sie so gelesen werden müssen:

Fünf

Fünf und siebenzig Quadrillionen, achthundert und vierzig tausend, neunhundert und sieben und dreißig Trillionen, fünfhundert und acht und zwanzig tausend zweyhundert und sechs und neunzig Billionen, dreyhundert und vier und sechzig tausend sieben hundert und neun Millionen, sieben tausend zweyhundert und drey und achtzig.

Der II. Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

19 §.

Wenn zwey Zahlen ungleich sind: so ist die kleinere in der grössern ganz enthalten, und überdem noch etwas mehr. (12 §.) So ist die Zahl 8 in der Zahl 14 ganz enthalten, und überdem enthält die Zahl 14 noch 6. Dieser Ueberschuß, um welchen eine Grösse eine andere kleinere übertrift, heißt die Differenz beyder Grössen, auch wohl das Complement der kleinern Grösse zur grössern: und eine Grösse, die zwoen, oder mehrern zusammengenommen gleich ist, wird die Summe der letztern genannt. So ist 6 die Differenz der Zahlen 14 und 8, und 14 ist die Summe der Zahlen 8 und 6. Zwey oder mehr Grössen zusammen addiren heißt ihre Summe suchen. Eine kleinere Grösse von der grösseren subtrahiren heißt ihrer beyder Differenz suchen.

p. a.

20 §.

Auch bey diesem Geschäfte sind kurze Zeichen eingeführt, wodurch man, statt der gewöhnlichen Wor-

te,

te, die Addition und Subtraction andeutet. Das Zeichen (+) bedeutet die Addition, und man setzt es zwischen beyden Grössen, die addirt werden sollen. Diesemnach muß der Ausdruck 16 + 3 = 19 so verstanden werden: zu 16 addirt 3 giebt 19. Der Bequemlichkeit wegen spricht man das Zeichen (+) durch mehr, oder *plus* aus, weil es die eine Grösse um die andre vermehrt. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strich (—), welchen man vor derjenigen Grösse setzt, die von der andern subtrahirt werden soll. So heißt der Ausdruck: 16—3=13 so viel als: von 16 subtrahirt 3, läßt 13. Man spricht der Kürze wegen dies Zeichen durch das Wort weniger, oder *minus* aus, weil es die grössere Zahl um die kleinere vermindert.

Es kann seyn, daß die Grösse, welche man von einer andern subtrahiren soll, selbst schon eine Summe, oder Differenz, andrer Grössen ist. In diesem Fall schliest man sie, Verwirrung zu vermeiden, in eine Parenthese ein. So bedeutet 9—(3+2) so viel, als 9—5, und 9—(3—2) so viel, als 9—1. Ueberhaupt also bedeutet der Ausdruck A—(B+C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Summe B+C, und A—(B—C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Differenz B—C von A ist subtrahirt worden.

21 §.

Die Addition und Subtraction sind einander so entgegen gesetzt, daß eine die andre aufhebt. Es fällt in die Augen, daß 12+4—4=12 sey. Will man dies allgemein ausdrücken: so giebt es den Grundsatz:

a. Wenn zu einer Grösse eine und eben dieselbe andre Grösse zugleich addirt und wieder von

ihr

ihr subtrahirt wird; oder zuerst von ihr subtrahirt: und hernach wieder addirt wird: so leidet die erste Grösse gar keine Aenderung.

22 §.

Wenn zwey Zahlen durch einfache Ziffern ausgedruckt sind, also keine derselben grösser als 9 ist: so kan man leicht die Summe beyder Zahlen in Gedanken finden, und durch die zugehörige Ziffer, nach der Regel des 15 §. ausdrücken. p. 11.

23 §.

Es sind zwo Zahlen gegeben, man soll beyde zusammen addiren.

Aufl. I. Man schreibe beyde Zahlen von der Rechten gegen die Linke so untereinander, daß die einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander zu stehen kommen, und ziehe der Bequemlichkeit wegen einen Strich darunter, um die gegebenen Zahlen dadurch von der gesuchten Summe abzusondern.

II. Sodann addire man die Ziffern, die zu einerley Ordnung gehören, für sich allein zusammen, und schreibe die einzelnen, nach dem 22 §. gefundenen Summen nach und nach untereinander, wiederum so, wie es die verschiedenen Ordnungen der einfachen Ziffern erfordern, indem man von der Rechten gegen die Linke von den Einheiten der niedern Ordnung auf die nächst gröffere Ordnung fortgeht.

III. Wenn man nun diese einzelnen Summen wiederum als gegebene Zahlen ansieht, und aufs neue wie vorhin, die einzelnen untereinander stehenden Ziffern summirt: so kann keine dieser einzelnen Summen über 9 steigen, wofern nicht die Zahl 9 selbst unter den ersten einzelnen Summen befindlich ist.

te, die Addition und Subtraction andeutet. Das Zeichen (+) bedeutet die Addition, und man setzt es zwischen beyden Grössen, die addirt werden sollen. Diesennach muß der Ausdruck 16 + 3 = 19 so verstanden werden: zu 16 addirt 3 giebt 19. Der Bequemlichkeit wegen spricht man das Zeichen (+) durch mehr, oder *plus* aus, weil es die eine Grösse um die andre vermehrt. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strich (—), welchen man vor derjenigen Grösse setzt, die von der andern subtrahirt werden soll. So heißt der Ausdruck: 16—3=13 so viel als: von 16 subtrahirt 3, läßt 13. Man spricht der Kürze wegen dies Zeichen durch das Wort weniger, oder *minus* aus, weil es die grössere Zahl um die kleinere vermindert.

Es kann seyn, daß die Grösse, welche man von einer andern subtrahiren soll, selbst schon eine Summe, oder Differenz, andrer Grössen ist. In diesem Fall schliest man sie, Verwirrung zu vermeiden, in eine Parenthese ein. So bedeutet 9—(3+2) so viel, als 9—5, und 9—(3—2) so viel, als 9—1. Ueberhaupt also bedeutet der Ausdruck A—(B+C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Summe B+C, und A—(B—C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Differenz B—C von A ist subtrahirt worden.

21 §.

Die Addition und Subtraction sind einander so entgegen gesetzt, daß eine die andre aufhebt. Es fällt in die Augen, daß 12+4—4=12 sey. Will man dies allgemein ausdrücken: so giebt es den Grundsatz:

a. Wenn zu einer Grösse eine und eben dieselbe andre Grösse zugleich addirt und wieder von ihr

ihr subtrahirt wird; oder zuerst von ihr subtrahirt: und hernach wieder addirt wird: so leidet die erste Grösse gar keine Aenderung.

22 §.

Wenn zwey Zahlen durch einfache Ziffern ausgedruckt sind, also keine derselben grösser als 9 ist: so kan man leicht die Summe beyder Zahlen in Gedanken finden, und durch die zugehörige Ziffer, nach der Regel des 15 §. ausdrücken. p. 11.

23 §.

Es sind zwo Zahlen gegeben, man soll beyde zusammen addiren.

Aufl. I. Man schreibe beyde Zahlen von der Rechten gegen die Linke so untereinander, daß die einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander zu stehen kommen, und ziehe der Bequemlichkeit wegen einen Strich darunter, um die gegebenen Zahlen dadurch von der gesuchten Summe abzusondern.

II. Sodann addire man die Ziffern, die zu einerley Ordnung gehören, für sich allein zusammen, und schreibe die einzelnen, nach dem 22 §. gefundenen Summen nach und nach untereinander, wiederum so, wie es die verschiedenen Ordnungen der einfachen Ziffern erfordern, indem man von der Rechten gegen die Linke von den Einheiten der niedern Ordnung auf die nächst gröffere Ordnung fortgeht.

III. Wenn man nun diese einzelnen Summen wiederum als gegebene Zahlen ansieht, und aufs neue wie vorhin, die einzelnen untereinander stehenden Ziffern summirt: so kann keine dieser einzelnen Summen über 9 steigen, wofern nicht die Zahl 9 selbst unter den ersten einzelnen Summen befindlich ist.

Nimmt man diesen besondern Fall aus, so kommt beym zweyten summiren in jeder Classe nur eine einfache Ziffer zu stehen. Diese Ziffern zusammen machen alsdenn eine zusammengesetzte Ziffer aus, welche die gesuchte Summe ausdrückt.

Exempel.

15683	578989	9999
7437	47947	999
10	16	18
11	12	18
10	18	18
12	15	9
1	11	10998
23120	5	
	626936	

Beweis. Es soll die gesuchte Summe ein Ganzes seyn, welches alle die Theile zusammen genommen enthält, woraus die gegebenen Zahlen zusammen gesetzt sind. Da man nun nacheinander die Einheiten einer jeden Ordnung zusammen zählt: so erhellet, daß die zusammengesetzte Ziffer, welche man zuletzt herausbringt, alle die Theile zusammen genommen ausdrücke, welche in den beyden gegebenen Zahlen enthalten sind. Daß aber die Voraussetzung der dritten Regel ihre Richtigkeit habe, beweiset das letzte Exempel, denn es kann beym ersten Summiren keine grössere Summe, als 18, also beym zweyten Summiren nicht mehr als 9 in jeder Classe herauskommen, wofern anders diese Zahl 9 nicht etwa selbst unter den ersten Summen befindlich ist.

Practische Verkürzung dieser Auflösung.

In der Ausübung kommt es nicht darauf an, sich an die theoretischen Regeln so genau zu binden, wenn man durch einen kürzern Weg eben das Resultat herausbringen kann. Die kürzern Wege sind hier vielmehr allemahl den Umwegen vorzuziehen. Wenn beym ersten Summiren die einzelnen Summen grösser als 9 sind, und dieserwegen aus zweyen Ziffern bestehen; so kann die niedrigste nicht grösser als 8 seyn, die höchste aber, welche in die folgende Classe kommt, ist allemahl 1. Diese 1 wird beym zweyten Summiren zur ersten Ziffer der folgenden einzelnen Summe addirt. Man kann demnach diese 1 in Gedanken, (in mente) behalten, ohne sie hinzu schreiben, und sie zur Summe der beyden Ziffern der folgenden Ordnung sogleich hinzu zählen, da man denn allemahl wiederum nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, bis man zur höchsten Classe kommt, woselbst die höchste Summe ganz niedergeschrieben wird. Auf die Art wird Raum auf dem Papier, und Zeit erspäret.

Exempel.

74893064270936
58429037869

74951493308805

24 §.

Es sind mehr, als zwey Zahlen *A, B, C, D,* gegeben, man soll alle in eine Summe bringen.

Aufl. Man addire zuerst A und B; zur Summe A+B addire man die dritte Zahl C, und zu dieser neuen Summe A+B+C die vierte D, so erhält

75436 A
328 B
9836 C
629 D.

man A+B+C+D. Es fällt in die Augen, daß man auf die Art fortfahren könne, es mögen so viele Zahlen, als man will, gegeben seyn. Die Rechnung würde demnach so zu führen seyn.

75436 A
328
75764 A+B
9836
85600 A+B+C.
629
86229 A+B+C+D.

Practische Verkürzung.

§. 17. Es ist im 22 §. angenommen worden, daß man ohne Schwierigkeit zwey Zahlen, deren keine grösser als 9 ist, in Gedanken zusammen zählen, und die Summe durch die ihr zugehörige Ziffer ausdrücken könne. Mehreres wird in der Theorie nicht erfordert, weil diese alle Operationen der Rechenkunst von den leichtesten und einfachsten herleitet. Wenn man inzwischen oft rechnet, so gewöhnt man sich leicht daran, mehr als zwey einfache Ziffern, oder Zahlen, deren keine grösser als 9 ist, in Gedanken zusammen zu zählen, da denn freylich, wenn derselben viele sind, die Summe ziemlich groß werden kann. Sie mag aber so groß werden, als sie wolle; so könnte man nun die einzelnen Summen gehörig untereinander setzen, sodann diese Summen von neuen summiren, und hiemit so lange fortfahren, bis sich zuletzt eine zusammengesetzte Ziffer ergiebt, so die ganze Summe ausdrückt. Auf die Art würde man mit dem vorigen Exempel so zu verfahren haben:

75436

75436
328
9836
629

29
10
21
14
7

Summe 86229.

Aber auch hier kann man die Verkürzung brauchen, daß man in den einzelnen Summen nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, und alles das in Gedanken gleich zur folgenden Classe addirt, was bey der zweyten Addition hinzukommen würde. Auf die Art wird das ganze Schema der Rechnung sehr ins Kurze gezogen, das sonst bey grossen und vielen Zahlen sehr weitläuftig gerathen würde. Wie davon folgendes Exempel zeugt.

	Verkürzte Art.
999	999
1289	1289
998	998
9999	9999
9999	9999
999	999
99	99
93978	93978
197949	197949
Summe	316309

79
73
65
29
18
1

109
12
15
10
2

316309

Man hat hier in der ersten Classe die Summe 79, deßwegen schreibt man nur 9 nieder, und behält 7 in mente, zählt diese 7 zur Summe 73 der folgenden Classe, so hat man 80. Man schreibt also nur die 0 nieder, und zählt 8 zur folgenden Summe 65, so hat

man 73, womit man eben so bis zu Ende umgeht.

Bey einer noch grössern Menge gegebener Zahlen kann es seyn, daß die einzelnen Summen jeder Classe über hundert, ja noch weiter hinaus gehen, da sie dann für sich allein schon aus dreyen ja noch mehreren Ziffern bestehen würden. Weil es hier würklich schon beschwerlich wird, so grosse Summen in Gedanken zusammen zu zählen, und man sich leicht dabey versehen kann: so ist es fast am besten, das Exempel zu theilen, und etwa zehn und zehn von den gegebenen Ziffern besonders zu summiren; da sich denn zuletzt aus diesen besondern Summen bequemer die Hauptsumme finden läßt. Will man inzwischen bey der vorigen Art bleiben: so ist noch allemahl die Regel zu beobachten, daß man unter jeder Columne nur die niedrigste Ziffer ihrer Summe niederschreibt, und die übrigen sogleich zur folgenden Classe rechnet, wie im nachstehenden Exempel. Hier giebt die erste Columne die Summe 142, also schreibt man 2 nieder, und behält 14 in mente. Die zweyte Columne giebt die Summe 132. Hiezu rechnet man die in mente gebliebenen 14, so erhält man 146, wovon man 6 niederschreibt, und abermahl 14 in mente behält. Die dritte Columne giebt 117, welches mit den in mente gebliebenen 14 zusammen 131 ausmacht. Also schreibt man 1 nieder, und behält 13 in Gedanken. Wenn man so durch alle Classen fortgehet: so ergiebt sich auf einmahl die ganze gesuchte Summe.

999
7899
4999
797
9989
99999
9479
99999
9499
99999
9479
99999
94299
4729
999
9999
563162.

25 §.

Es ist nur noch übrig, der bisherigen Lehre von der Addition ein Kennzeichen der Gleichheit und ein Paar Kennzeichen der Ungleichheit anzufügen, die aus dem Begrif der Addition unmittelbar folgen. Es sind folgende:

Wenn zwey Grössen einander gleich sind, und man addirt zu ihnen gleiche Grössen; so müssen die Summen gleich groß seyn.

Wenn aber zwey Grössen ungleich sind, und man addirt zur grössern eben so viel, als zur kleinern: so ist die erste Summe grösser, als die zweyte.

Addirt man demnach zur grössern mehr, wie zur kleinern: so wird noch um so mehr die erste Summe grösser, als die zweyte seyn. c.

26 §.

Wenn von einer Ziffer, die nicht grösser ist, als die grösseste mögliche Summe zwoer einfachen Ziffern, (also nicht grösser als 18) eine einfache Ziffer subtrahirt werden soll: so ist es leicht in Gedanken die Differenz zu finden, und durch die ihr zugehörige Ziffer auszudrücken.

27 §.

Es sind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man soll die kleinere von der grössern subtrahiren.

Aufl. I. Man schreibe die kleinere Zahl unter der grössern, so wie bey der Addition, damit die Ziffern von einerley Ordnung untereinander zu stehen kommen.

II. Wenn nun in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner ist, als die darüber stehende: so zähle man in Gedanken die kleinere von der grössern zurück (26 §.), und setze was übrig bleibt, darunter. So würde man mit folgenden Exempeln umgehen können.

p. 23.

987468	432789645
736254	320645413
Rest 251214	Rest 112144232

III. Sind unter den Ziffern der kleinern Zahl einige gröſſer, als die drüber stehenden, wie im beygefügten Exempel, wo in der Zahl B, bey den Ziffern der ersten und vierten Decimal-Ordnung dieser Fall statt hat; so darf man nur erwägen, daß die Ziffer A aus folgenden Theilen durch die Addition sich zusammensetzen lasse.

547328	A
465296	B

A { 128, 1472, 4

B 465296

Rest: 82032.

Nun kann man so subtrahiren: 6 von 8 bleibt 2, 9 von 12 bleibt 3. Es ist nemlich eine Einheit der zweyten Decimal-Ordnung einerley mit zehn Einheiten der ersten Decimal-Ordnung. Wenn man demnach eine Einheit der zweyten Ordnung zu den Einheiten der ersten Ordnung rechnet: so werden diese dadurch um zehn Einheiten vermehrt. So kann man nun überhaupt zu einer jeden der einfachen Ziffern in A, die zu klein sind, als daß man davon die untenstehende subtrahiren könnte, eine Einheit zurechnen, die man von der nächsthöhern Ordnung abnimmt, wodurch

wodurch die nächstniedrige allemahl um 10 vermehrt wird. Da nun die untenstehende nie grösser als 9 ist; so wird man sie allemahl nach §. 26. subtrahiren können. Wann im Exempel bey der vierten Decimal-Ordnung nochmahl der Fall vorkommt: so sieht man leicht, daß man so subtrahiren müsse: 6 von 14 bleibt 8. p. 23.

IV. Es ist zur Beobachtung dieser Regel eben nicht nöthig, die Zahl A so wie vorhin geschehen ist, in Theile zu vertheilen. Dies ist hier nur deßwegen geschehen, um den Grund des in diesem Fall nöthigen Verfahrens desto deutlicher vor Augen zu legen. Man kann sogleich zu einer solchen Ziffer in A, die kleiner ist, als die untenstehende, in Gedanken 10 zurechnen, und sodann die untenstehende subtrahiren. Weil aber hiedurch die in A folgende Ziffer der nächsthöhern Ordnung um Eins vermindert worden; so ist es rathsam, dies durch ein willkührliches Zeichen, z. E. durch einen drüber gesetzten Punkt zu bemerken, damit man diesen Umstand bey der folgenden Subtraction nicht vergesse. Man drückt sich hier gewöhnlich so aus: der Punkt zeige an, daß man von der Ziffer eins geborget habe. Das Schema der Rechnung würde nun so aussehen.

5̇47̇328	7̇92̈32̈64̈930
465296	98697898
Rest 82032	Rest 7824567032

V. Bey diesem sogenannten Borgen kann der Fall vorkommen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen soll, die 0 ist, und so läßt sich davon nichts abnehmen. Folgt nun nach der 0 eine Ziffer: so verfährt man damit, wie vorhin. Man borgt davon 1,

und zeigt dies durch einen Punkt an, so hat man 10 statt der 0. Von diesen 10 kann man nun wieder 1 zur folgenden Classe borgen; so bleiben es 9, wie in folgenden Exempeln.

..10..10	..10.10.10.
7804307	6802090034
5965878	394939269
Rest 1838429	Rest 2852697 65

Es ist in der Ausübung nicht nöthig, wie hier geschehen ist, die 10 über der 0 würklich hinzusetzen, und durch einen Punkt anzuzeigen, daß etwas wieder dahin weggeborget sey. Man darf nur ein für allemahl diese Regel merken:

Wenn man über eine 0 wegborget, so ist es so gut, als wenn man die 0 in 9 verwandelt hätte.

VI. Ja diese Regel läßt sich selbst auf die Fälle erweitern, wenn mehrere Nullen nacheinander folgen. Man muß sodann von der Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen: hiedurch erhält man 10 an die Stelle dieser 0. Von diesen 10 borgt man wiederum 1 weg in die nächst niedrigere Classe, so erhält man in dieser wiederum 10, und in jener bleiben 9. So geht man fort durch alle Classen der nach einander folgenden Nullen, wie im nachstehenden Exempel:

.10101010101010.	..10.10.
70000008006200 34	
19863279384026 9	
Rest: 50136800677976 5.	

Es ist in der Ausübung wiederum nicht nöthig, die Ziffern 10, nebst den Punkten über den Nullen hinzusetzen,

zusetzen, welches hier nur mehrerer Deutlichkeit wegen so gemacht ist. Denn die vorige Regel läst sich nun allgemeiner so ausdrücken.

Wenn man über mehrere nach einander folgende Nullen wegborget; so ist es eben so gut, als ob man jede dieser Nullen in 9 verwandelt hätte.

28 §.

Wenn zwo Grössen gleich sind, und man subtrahiret von ihnen gleiche Grössen: so werden die Differenzen oder Reste gleich seyn. a.

Dieser für sich klare Satz giebt abermahl ein Kennzeichen der Gleichheit ab, und man kann damit zugleich folgende zwey Kennzeichen der Ungleichheit verbinden.

Wenn zwey Grössen ungleich sind, und man subtrahirt von der grössern eben so viel, als von der kleinern: so ist der erste Rest grösser, als der zweyte.

Wenn aber zwey Grössen gleich sind, und man subtrahirt von der einen mehr, als von der andern: so wird der erste Rest kleiner, als der zweyte seyn.

29 §.

Wenn man die abgezogene Zahl zum Rest addirt, so muß die grössere Zahl, wovon man jene subtrahirt hat, wieder herauskommen (21 §.). Dies dienet zur Prüfung, ob man richtig subtrahirt habe, oder in der Rechnung ein Fehler eingeschlichen sey. Denn kommt die grössere Zahl nicht wieder heraus, und man hat beym addiren nicht gefehlt; so ist es gewiß, daß man beym subtrahiren gefehlt habe. Man kann auch den Rest von der grösseren Zahl subtrahiren, so muß die abge- p. 16. a.

abgezogene kleinere Zahl herauskommen, weil diese mit dem Rest zusammen genommen der grössern gleich seyn soll. Auf ähnliche Art läßt sich die Addition prüfen. Hat man nemlich zwey Zahlen zusammen addirt, und subtrahirt eine derselben von der Summe; so muß die andere zum Rest bleiben. Hat man drey Zahlen zusammen addirt, und man subtrahirt von der Summe die eine derselben: so muß die Summe der beyden übrigen zum Rest kommen. Es erhellet leicht, daß diese Prüfung sich auf so viele zusammen addirte Zahlen, als man will, erstrecke. Wenn eine der summirten Zahlen vom Rest subtrahirt wird; so muß der Rest so groß seyn, als die Summe aller übrigen summirten Zahlen.

Der III. Abschnitt.

Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

30 §.

p. 17. Es können alle Zahlen, die man nach dem 23 §. zusammen addirt, gleich groß seyn, wie in dem beygefügten Exempel. Hier wird die Zahl 318 in der Summe 954 dreymahl enthalten, oder, welches einerley ist, die Summe 954 dreymal grösser, als die Zahl 318 seyn. Man könnte dies mit andern Worten auch so ausdrücken. Wenn die Zahl 954 in drey gleiche Theile getheilt wird: so ist jeder Theil 318. Nun heißt überhaupt ein solcher Theil, der in dem Ganzen genau etliche mahl enthalten ist, ein

	318
	318
	318
	954

aliquo-

aliquoter Theil des Ganzen, oder ein Maaß des Ganzen, (pars aliquota, mensura, submultiplum) und das Ganze selbst heißt ein vielfaches (multiplum) eines solchen Theils. Die Wörter ein zweyfaches, oder doppeltes, dreyfaches, vierfaches, u. s. f. (duplum, triplum, quadruplum) drücken es specieller aus, wie vielmahl das Ganze in jedem besondern Fall den aliquoten Theil desselben, davon die Rede ist, in sich enthalte. Wenn nun eine Grösse gegeben ist, und man soll ein vielfaches derselben suchen; so erhellet, daß überdem eine ganze Zahl müsse gegeben seyn, die es ausdrückt, wie vielmahl jene gegebene Grösse in der gesuchten enthalten seyn soll. Wenn die gegebene Grösse eine Zahl wäre: so würde die andre ganze Zahl ausdrücken, wie oft man jene niederschreiben müste, wenn man das verlangte Vielfache derselben vermittelst der Addition suchen wollte. Aber dies würde bey grossen Zahlen eine überaus beschwerliche Sache seyn. Deßwegen hat man darauf bedacht seyn müssen, diese Arbeit zu verkürzen. Die Methode nun, nach welcher man das vielfache herausbringt, worin die gegebene Grösse so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in der gegebenen ganzen Zahl, heißt die **Multiplication** mit dieser ganzen Zahl. Die gegebene Grösse, wovon man ein vielfaches machen soll, heißt hier das **Multiplicandum**, die ganze Zahl aber, welche ausdrückt, wie vielmahl man jene Grösse nehmen soll, der **Multiplicator**. Beyde führen auch den gemeinschaftlichen Nahmen **Factoren**. Das Vielfache selbst, so man durch die Multiplication herausbringt, wird das **Product** genannt.

31 §.

Man hat für diese Rechnungsart ebenfalls ein eigenes Zeichen festgesetzt, dessen man sich statt des Worts multiplicirt, auf folgende Art bedienet. Man schreibt gewöhnlich zuerst das Multiplicandum, nach demselben den Multiplicator, und setzt alsdenn das liegende Creutz (×) oder statt dessen nur einen Punkt (.) zwischen beyden. So ist 3 × 4 oder 3.4 so viel als 3 mit 4 multiplicirt. Wenn das Multiplicandum keine Zahl, sondern irgend eine andre Grösse ist, oder wenigstens durch ein allgemeineres Zeichen, als die gewöhnlichen Ziffern sind, z. E. durch einen Buchstaben, ausgedruckt wird: so setzt man den Multiplicator auch wohl voran, ohne sonst ein Zeichen dazwischen zu setzen, z. E. 3 Thaler, 5 Pfund. Soll eine Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl multiplicirt werden: so schliest man das Multiplicandum in einer Parenthese ein, auf diese Art (3+5+9) × 3, welches eben so viel ist, als 17 × 3. Wenn beyde Factoren von dieser Art sind: so wird jeder für sich in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. (3+5) (7+4) ist so viel, 8 × 11, und (9−5) (7−2) so viel als 4 × 5.

32 §.

Wenn man gleiche Grössen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt: so sind die Producte gleich groß, weil gleiches zu gleichen addirt gleiche Summen giebt.

Wenn man aber ungleiche Grössen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt das grössere Multiplicandum ein grösseres Product, als das kleinere, weil das Grössere zum Grössern

fern addirt, eine grössere Summe giebt, als das Kleinere zum Kleinern addirt geben kann (25 §.). p. 23 c.

33 §.

Wenn beyde Factoren ganze Zahlen sind; so geben sie einerley Product, man mag die erste mit der zweyten, oder die zweyte mit der ersten multipliciren.

Beweis. Man gehe einmahl von der gewöhnlichen Art ab, wie sonst die Zahlen durch Ziffern bezeichnet werden, und bezeichne sie mit so vielen bey einander hingesetzten Strichen, als die Zahl Einheiten enthält, daß also z. E. 5 so geschrieben würde: IIIII. Man schreibe das Multiplicandum, auf diese Art ausgedrückt, so oft unter sich selbst, als der Multiplicator 1 enthält, auf folgende Art:

A IIIII B
IIIII
IIIII
C. IIIII

so ist die Summe aller dieser Striche mit dem Product $5+5+5+5=5 \times 4$ einerley. Man hat nemlich die Reihe von A nach B so oft genommen, als die Reihe von A nach C Eins enthält. Aber wenn man die Reihe von A nach C so oft nimmt, als in der Reihe von A nach B die 1 stehet, so bekömmt man eben dieselbe Menge, die sich nun so ausdrücken läßt: $4+4+4+4+4=4 \times 5$. Es ist klar, daß es hier gar nicht darauf ankomme, wie viele 1 in der Reihe von A nach B stehen, oder wie oft diese Reihe unter sich selbst hingeschrieben sey. Wenn demnach die Anzahl der 1 in der Reihe von A nach B durch den Buchstab *n*, und die Anzahl der 1 von A nach C herunter, durch den Buchstab *m* angedeutet wird; so mögen

der

der Einheiten in n und m so viel seyn, als da wollen, es wird doch immer dieselbe Menge sowohl durch $n \times m$, als auch durch $m \times n$ ausgedrückt werden können. Also ist überhaupt $n \times m = m \times n$, wenn n und m ganze Zahlen sind.

34 §.

Wenn demnach auch mehr, als zwey ganze Zahlen in einander zu multipliciren sind: so ist es ebenfalls einerley, in welcher Ordnung man die Multiplication vornimmt. So ist $2 \times 4 \times 7 = 4 \times 2 \times 7 = 4 \times 7 \times 2 = 7 \times 4 \times 2$. Denn da man die Stelle eines jeden Factors mit der Stelle des nachfolgenden oder vorhergehenden verwechseln kann: so kann jeder in die Stelle eines jeden der übrigen kommen.

35 §.

a. Wenn man gleiche Grössen mit ungleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt der grössere Multiplicator ein grösseres Product, als der kleinere. Denn wenn von zweyen gleichen Grössen die eine mehrmahl zu sich selbst addirt wird, als die andre; so muß ohne Zweifel die erste Summe grösser seyn, als die zweyte.

b. Wenn demnach von zwoen ungleichen Grössen die grössere mit einer grösseren ganzen Zahl multiplicirt wird, als die kleinere: so ist noch um so mehr das erste Product grösser, als das zweyte.

36 §.

Es sind zwo durch einfache Ziffern ausgedruckte Zahlen gegeben, man soll eine durch die andere multipliciren.

Aufl. Man schreibe das Multiplicandum so oft unter sich selbst, als der Multiplicator Eins enthält, und suche die Summe nach dem 24 §.: so ist diese Summe mit dem Product beyder Zahlen in einander einerley. Es dienet einigermassen zur Verkürzung der Rechnung, wenn man die größte von den beyden Zahlen für das Multiplicandum nimmt, da es einerley ist, welche von beyden dafür gehalten wird (33 §). Allein dies Verfahren würde doch in der Folge zu weitläuftig seyn: also ist es am besten, ein für allemahl alle mögliche Producte zu suchen, die herauskommen können, wenn die Factoren einfache Ziffern sind, und diese Producte etwa in eine Tabelle zu bringen, daraus man sie jedes mahl leicht herausnehmen kann. Diese Tabelle ergiebt sich von selbst, wenn man die Ziffern von 1 bis 9 nach einander hinschreibt, und darunter ihre dupla setzt, die man erhält, wenn man jede zu sich selbst addirt. Unter diesen duplis setzt man die tripla, indem man jede Zahl zu ihrem duplo addirt, und unter diesen wieder die quadrupla, indem man jede Zahl zu ihrem triplo addirt, u. s. f. bis man auf die noncupla kommt. So entsteht folgende Tabelle, die man der Bequemlichkeit halber in Fächer eintheilen kann, so daß jedes Product sein eigenes Fach bekommt. Auf die Art wird der eine Factor dieses Products grade über demselben in der obersten Reihe, der andre aber linker Hand im Anfange derselben Reihe stehen, in welcher die Zahl selbst befindlich ist.

p. 29.

p. 31.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wenn man nun z. E. das Product 8 × 6 finden soll: so suche man den einen Factor 8 in der obersten Reihe, und den andern Factor 6 unter den ersten Ziffern jeder Reihe linker Hand auf, gehe sodann von der 8 gerade herunter bis auf die sechste Reihe, und von der 6 gegen die Rechte zu fort, bis man in das Fach kommt, wo beyde Reihen zusammen treffen. Die Zahl 48, welche in diesem Fache stehet, ist das gesuchte Product.

So muß man wenigstens so lange verfahren, bis man diese Producte durch öftere Uebung im Rechnen von selbst im Gedächtniß behält, oder sich wenigstens die Sache so geläufig gemacht hat, daß man diese Summe leicht, so wie die Summe des 22 §. in Gedanken finden kann. Diese Tafel ist übrigens mit dem Ein mahl eins einerley. Sie heist auch von dem Erfinder der Pythagorische Rechentisch, (abacus Pythagoricus.)

p. 17.

37 §.

Eine Zahl wird mit 10 multiplicirt, wenn man zur Rechten eine Nulle anhängt. Man multiplicirt

eben

eben diese Zahl mit 100 durch Hinzusetzung zweyer, mit 1000 durch Hinzusetzung dreyer Nullen, u. s. f. (16 §.) Also ist z. E. 40 so viel, als 4×10, $400 = 4 \times 100$, $4000 = 4 \times 1000$, u. s. f. Diesem nach ist $7000 \times 4 = 7 \times 1000 \times 4 = 7 \times 4 \times 1000$ (§. 34) $= 28000$, und $7000 \times 400 = 7 \times 1000 \times 4 \times 100 = 2800000$ (34 §.) Hieraus folgt die Regel: p. 12. p. 32. p. 32.

Wenn die Factoren einfache Ziffern mit angehängten Nullen sind: so multiplicirt man die einfachen Ziffern nach dem 36 §. und hängt an dem Product so viele Nullen, als beyden Factoren zusammen beygefügt werden. b. p. 32.

38 §.

Man kann in allen solchen Fällen, wenn das Multiplicandum aus mehrern Theilen bestehet, jeden Theil für sich multipliciren, und hiernächst alle einzelne Producte zusammen addiren. Denn es ist für sich einleuchtend, daß $(3+5) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4$ seyn müsse. Eben dies läst sich mit gehöriger Veränderung auf den Fall anwenden, wenn das Multiplicandum eine Differenz zwoer Grössen ist. In diesem Falle ist das verlangte Product die Differenz der beyden Producte, die man findet, wenn zuerst der grössere, und alsdenn der kleinere Theil des Multiplicandi sovielmahl genommen wird, als der Multiplicator Eins enthält. So ist $(5-3) \times 4 = 5 \times 4 - 3 \times 4$, und überhaupt $(A - B) \times n = A \times n - B \times n$. Es sey nemlich $A - B = D$; so ist $A = B + D$, und $A \times n = B \times n + D \times n$, folglich $A \times n - B \times n = D \times n$ (28 §.) $= (A - B) \times n$, weil $D = A - B$. a. p. 27. a.

39 §.

Eine zusammengesetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Aufl. Man setze den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition, und multiplicire nach einander die Ziffern der verschiednen Ordnungen des Multiplicandi mit dem gegebenen Multiplicator, nach den Regeln des 36 und 37 §. Diese einzelnen Producte setze man gehörig untereinander, so daß die Ziffern von einerley Ordnung untereinander kommen. Alle diese einzelnen Producte bringe man zuletzt in eine Summe; so wird diese das gesuchte Product seyn. (38 §.)

7854	A	97423	C
3	B	5	D
12		15	
150		100	
2400		2000	
21000		35000	
		450000	
23562	A × B.	487115	C × D.

Man wird leicht von selbst darauf verfallen, wenn man die beygefügten Exempel ansieht, daß sich hier eben die Verkürzung wie bey der Addition anbringen lasse. (24 §.) Statt jedesmahl das einzelne Product ganz nieder zu schreiben, ist nur nöthig, die niedrigste Ziffer in ihrer gehörigen Stelle hinzusetzen. Denn die nächsthöhere kann man in mente behalten, und sogleich zum nächstfolgenden Product hinzurechnen: so ergiebt sich die Summe der einzelnen Producte sogleich von selbst. Auf die Art ist das nachstehende Exempel berechnet.

908426935 2783	A.
8	B.
7267415482 2264	A × B.

40 §.

40 §.

Wenn an dem einen, oder auch an beyden Factoren Nullen hängen: so ist es nicht nöthig, diese bey der Multiplication selbst in Betrachtung zu ziehen. Nachdem man aber die Ziffern gehörig in einander multiplicirt hat, setzt man zu dem Product so viele Nullen hinzu, als beyde Factoren zusammen genommen enthalten. Denn so ist z. E. 3450000 × 7000 = 345 × 7 × 10000 × 1000 (37 §.). Also wird p. 35. b. die Rechnung so geführt:

3450000
7000

24150000000.

41 §.

Zwey Zahlen in einander zu multipliciren, wenn gleich beyde durch zusammengesetzte Ziffern ausgedrückt sind.

Aufl. Man schreibe den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition.

Hierauf multiplicire man das ganze Multiplicandum zuerst mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators, und schreibe das Product gehörig unter. (39 §.) Eben diese Multiplication wiederhole man p. 36. mit der nächsthöhern Ziffer des Multiplicators, (40 §.) und fahre so fort, bis die Multiplication mit allen Ziffern des Multiplicators geschehen ist, und die einzelnen Producte gehörig untereinander gesetzt sind.

Alle diese einzelne Producte bringe man in eine Summe, so hat man das ganze gesuchte Product (38 §.): und man siehet leicht, wie diese Regeln in p. 35. a. dem nachstehenden Exempel angewandt sind.

Die den einzelnen Producten im ersten Exempel nach dem §. beygefügten Nullen läßt man der Kürze halber in der Ausübung weg, wie im zweyten Exempel geschehen ist, weil sie die Summen nicht ändern, wenn jedes folgende Product nur gehörig eine Classe weiter gegen die linke Hand eingerückt wird. Es ist noch anzumerken, daß auch hier die Regel des 40 §. gelte, daferne dem einen, oder beyden Factoren Nullen beygefügt sind.

26394	789643254
9362	53073
52788	2368929762
1583640	55275027 78
7918200	2368929762
237546000	3948216270
247100628	41908736419542

Im zweyten Exempel steht statt der Ziffer der zweyten Decimal-Ordnung im Multiplicator eine 0. Es ist klar, daß statt des Products, so eine Ziffer dieser Ordnung in das Multiplicandum multiplicirt geben würde, hier lauter Nullen hingeschrieben werden müsten. Weil diese nun die Summe nicht ändern: so braucht man sie nicht hinzusetzen; sondern man rückt statt dessen nur das Product in die nächst folgende Ziffer des Multiplicators um eine Classe weiter gegen die linke Hand, weil diese Ziffer nun um zwey Ordnungen höher ist, als die vorige war. Folgten mehrere Nullen im Multiplicator nach einander: so kann man sie aus eben dieser Ursache allemahl übergehen, nur muß alsdenn das Product in die nach den Nullen folgende Ziffer, um so viele Classen gegen

gen die linke Hand gerückt werden, als Nullen nach einander folgen.

Der IV. Abschnitt.

Von der Division mit ganzen Zahlen, und dem Ursprung der Brüche.

42 §.

Man kann das bisherige Verfahren auch umkehren. Es lassen sich wenigstens manche Zahlen in mehr oder weniger gleiche Theile eintheilen, so daß jeder Theil wieder eine gleiche Zahl ist. Wenn nun bestimmt wird, in wie viele gleiche Theile eine Zahl zu theilen ist: so kann man fragen, wie groß jeder dieser aliquoten Theile werden müsse. So läßt sich die Zahl 12 in 2 oder 3, oder 4 gleiche Theile theilen, und im ersten Fall erhält man 6, im zweyten 4, im dritten 3, für die Größe eines jeden aliquoten Theils, von 12. Die Wörter: Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. (subduplum, subtriplum, subquadruphum, etc.) bezeichnen dergleichen aliquote Theile des Ganzen, und drücken es zugleich specieller aus, wie vielmahl ein solcher Theil in dem Ganzen enthalten sey. Man kann jede andre Grösse ebenfalls in eine gewisse Menge gleicher Theile eintheilen, und es kann eine ganze Zahl gegeben seyn, die es ausdrückt, in wieviele gleiche Theile die Grösse eingetheilt werden soll. Das Verfahren, vermittelst dessen man die Grösse herausbringt, welche in der gegebenen Grösse so vielmahl enthalten ist, als die gleich-

falls gegebene ganze Zahl ausdrückt, heißt die Division der gegebenen Grösse mit dieser ganzen Zahl. Die Grösse, welche man eintheilen soll, heißt das Dividendum, die Zahl, welche ausdrückt, in wieviele gleiche Theile jenes zu theilen ist, der Divisor, und der aliquote Theil des Dividendi, welchen man eigentlich sucht, wird der Quotient genannt. Diese Division wird durch zwey übereinander stehende Punkte (:) bezeichnet, die man zwischen dem Dividendo und Divisor setzt. Auf solche Art wird der Ausdruck $8:2=4$ bedeuten, daß 8 dividirt durch 2 den Quotienten 4 gebe. Wenn eine ganze Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl zu dividiren ist: so schließt man das Dividendum in einer Parenthese ein, auf folgende Art: $(7+3+6):4$, welcher Ausdruck eben so viel bedeutet: als $16:4$. Wenn der Divisor ein Ausdruck von eben der Art ist; so wird er ebenfalls in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. $(6+4+8):(2+4)$, ist so viel als $18:6$.

43 §.

Die Multiplication und Division sind wie die Addition und Subtraction einander so entgegen gesetzte Rechnungsarten, daß eine die andre aufhebt. Es ist offenbar, daß $3 \times 2 : 2 = 3$, oder $6 : 2 \times 2 = 6$ sey. Die Hälfte des doppelten Ganzen ist das Ganze selbst, und das halbe Ganze doppelt genommen ist wiederum das Ganze selbst. Ein Drittel des dreyfachen Ganzen ist das Ganze, und das dreyfache von einem Drittel des Ganzen, ist wiederum das Ganze selbst. Ueberhaupt wenn man eine Grösse so oft man will, zu sich selbst addirt, und hiernächst

die

die Summe in eben so viele gleiche Theile eintheilt, als man Stücke zusammen addirt hatte: so werden diese Theile die summirten Zahlen selbst seyn. Wenn dagegen eine Grösse in so viele gleiche Theile, als man will, getheilt ist, und man einen Theil davon so oft zu sich selbst addirt, als man Theile hat: so muß die eingetheilte Größe selbst wieder herauskommen. Dies giebt die allgemeine Regel.

Wenn man eine Grösse mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und das Product mit eben der Zahl wieder dividirt: so erhält man das Multiplicandum wieder. Und wenn man eine Grösse mit einer ganzen Zahl dividirt, den Quotienten aber mit dem Divisor wieder multiplicirt: so erhält man das Dividendum wieder.

44 §.

Wenn man gleiche Grössen durch gleiche ganze Zahlen dividirt; so sind die Quotienten gleich.

Beweis. Es können die Buchstaben A und B ein Paar gleiche Grössen, welche man will, also auch ein Paar gleiche Zahlen bedeuten, die man beyde mit einerley ganzen Zahl n dividiren soll. Wenn nun $A=B$ ist, so muß $A:n=B:n$ seyn. Denn wäre $A:n > B:n$ so wäre $A > B$ (43. 32 §.), und wenn p. 30. $A:n < B:n$ wäre: so müste aus eben dem Grunde $A < B$ seyn. Beydes widerspricht der Voraussetzung, daß $A=B$ seyn soll; deßwegen ist nothwendig $A:n=B:n$.

45 §.

An diese Sprache der Mathematiker, und die Art sich kurz auszudrücken, wenn sie statt der ge-

wöhnlichen Nahmen eine Grösse überhaupt, oder auch statt der Ziffern eine Zahl überhaupt, mit Buchstaben des Alphabeths bezeichnen, gewöhnt man sich leicht, ob es gleich den ersten Anfängern einen kleinen Anstoß zu verursachen pfleget. Die Sache hat einmahl den Nutzen, daß der Vortrag dadurch abgekürzt wird, und fürs zweyte auch diesen, daß die Beweise dadurch ihre völlige Algemeinheit erhalten. Wenn der Satz vorigen §phs allgemein wahr seyn soll: so muß es gleich viel seyn, was für Grössen man statt A und B in dem Beweise setzet, wenn sie nur beyde gleich groß sind. So muß man auch statt *n* jede beliebige ganze Zahl setzen können. Man hat aber weder so allgemeine Zrichen für die Zahlen, noch auch für andre Grössen. Deßwegen muß man entweder neue Zeichen von so allgemeiner Bedeutung einführen, und das ist unnöthig, weil die Buchstaben füglich dazu gebraucht werden können: oder man muß alles in weitläuftige Worte einkleiden, welches viel beschwerlicher seyn würde. Wer diese Art des Vortrages noch nicht gewohnt ist, der setze statt der gebrauchten Buchstaben Zahlen, die ihm zuerst beyfallen, und beobachte dabey nur dies, daß er statt der Buchstaben, die gleiche oder ungleiche Zahlen oder Grössen überhaupt bedeuten sollen, auch gleiche, oder ungleiche Zahlen nimmt; so wird er ohne Schwierigkeit die Beweise überdenken können, und es bald dahin bringen, daß er dieses Hülfsmittels nicht mehr benöthigt ist.

46 §.

Wenn von zwoen Grössen die eine grösser als die andre ist, und man dividirt beyde mit

glei-

gleichen ganzen Zahlen; so ist der erste Quotient grösser als der zweyte.

Beweis. Es sey A ▷ B, und man dividire beyde mit der ganzen Zahl *n*. Wäre nun A : *n* = B : *n*: so müste A = B seyn (32. 43 §.); und wenn A : *n* ◁ B : *n* wäre: so folgte daraus, daß A ◁ B wäre (32 §). p. 30. Also ist nothwendig A : *n* ▷ B : *n*, weil die beyden andern Fälle wider die Voraussetzung A ▷ B streiten.

47 §.

Wenn zwo Grössen gleich sind, und man dividirt die eine mit einer grössern ganzen Zahl, als die zweite; so ist der erste Quotient kleiner, als der letzte.

Beweis. Es sey A = B und *n* ▷ *m*, so daß *n* und *m* ein Paar ganze Zahlen sind. Wäre nun A : *n* = B : *m*: so würde folgen, daß A ▷ B sey; (35 §.) p. 32. a. und wenn A : *n* ▷ B : *m* wäre: so folgte daraus ebenfalls, daß A ▷ B seyn müste (35 §.). Beydes ist p. 32. b. der Voraussetzung A = B zuwider: also muß A : *n* ◁ B : *m* seyn.

48 §.

Bestehet das Dividendum aus mehrern Theilen, die durch die Addition verbunden sind; so ist der Quotient die Summe aller einzelnen Quotienten, die man erhält, wenn man jedes Stück des Dividendi mit der gegebnen ganzen Zahl dividirt.

Beweis. Es sey A + B + C + etc. das Dividendum, und der Divisor sey *n*. Man setze, es werde A : *n* + B : *n* + C : *n* + etc. = S: so ist A + B + C + etc. = S × *n* (32. 38. 43 §.). Also (A + B + C + etc.) : *n* = S (44 §.) oder (A + B + C + etc.) : *n* = A : *n* + B : *n* + C : *n* + etc. p. 35. et 40.

49 §.

49 §.

Eben das gilt mit gehöriger Veränderung, wenn das Dividendum eine Differenz zwoer Grössen ist. Der Quotient wird sodann die Differenz der beyden einzelnen Quotienten, die man durch die Division der ganzen Zahl in jedes Stück des Dividendi erhält. So ist $(A-B):n = A:n - B:n$. Es sey nämlich $A-B=D$: so ist $A=B+D$, und $A:n = B:n + D:n$ (48 §.) folglich $A:n - B:n = D:n$ (28 §), oder $A:n - B:n = (A-B):n$.

50 §.

Wenn das Dividendum eine ganze Zahl, und ein vielfaches des Divisors ist; so ist der Quotient eine Zahl, welche angiebt, wie vielmahl der Divisor im Dividende enthalten sey.

Beweis. Es sey das Dividendum D eine ganze Zahl so wie der Divisor d, und Q sey der Quotient: so hat man $D:d = Q$, und folglich $D = Q \times d$ (43 §.). Aber $Q \times d = d \times Q$ (33 §.): also $D = d \times Q$ (11 §.) und $D:Q = d$. Das will sagen: das Dividendum mit dem Quotienten dividirt, giebt den Divisor zum Quotienten: also ist d in D so vielmahl enthalten, als Q die Einheit enthält (42 §.)

51 §.

Dies ist auch umgekehrt wahr: Wenn eine ganze Zahl ausdrückt, wie vielmahl eine kleinere Zahl in einer grössern enthalten sey; so ist sie einerley mit dem Quotienten, den man findet, wenn die grössere Zahl mit der kleinern dividirt wird.

Beweis. Wenn n die Zahl ist, welche ausdrückt, wie vielmahl d in D enthalten sey: so ist $D = d \times n$ (30 §.). Weil nun auch $D = d \times Q$ (50 §.):

so

so wird $d \times n = d. \times Q$ (11 §.) und $n \times d = Q \times d$ (33 §.) folglich $n = Q$ (44 §.) oder $n = D : d$. p. 11. p. 31. p. 41.

52 §.

Eine grössere Zahl mit einer kleinern dividiren heißt also auch so viel, als eine dritte Zahl suchen, welche ausdrückt, wie vielmahl die kleinere in der grössern enthalten sey. Wenigstens ist dieser Begrif mit dem vorigen des 42 §. einerley, wenn von ganzen Zahlen die Rede ist, und wenn die kleinere Zahl ein aliquoter Theil der grössern ist. Man könnte also den Quotienten Q, welchen die Division der Zahl D mit einer andern *d* giebt, so finden. Man müßte *d* von D so vielmahl subtrahiren, als es angeht, und die Zahl bemerken, welche ausdrückt, wie vielmahl dies geschehen könne. Diese Zahl würde der Quotient seyn. Aber, dessen zu geschweigen, daß dies in den meisten Fällen, ein viel zu mühsames Verfahren seyn würde: so setzt es überdem voraus, daß der Divisor kleiner, als das Dividendum, und zugleich ein aliquoter Theil desselben sey. Es kommen aber sehr viele Fälle vor, wo weder das eine, noch das andre statt hat, und diese müssen jetzt genauer erörtert werden. p. 29.

53 §.

Es sey also zuerst die Einheit selbst das Dividendum, und der Divisor eine ganze Zahl, z. E. 3: so muß der Quotient der dritte Theil der Einheit seyn. Demnach kann der Quotient keine Zahl seyn, die aus der vorigen ganzen Einheit zusammen gesetzt ist. Es sey nun die Zahl 2 das Dividendum, und der Divisor bleibe 3; so muß der Quotient der dritte Theil der Zahl 2 seyn. Es ist aber die Zahl $2 = 1+1$. Wenn man also von jeder Einheit den drit-

ten

ten Theil nimmt; so werden beyde Drittheile zusammen genommen den dritten Theil des Ganzen ausmachen (48 §.) Demnach beträgt in diesem Falle der Quotient 2 Drittheile des Ganzen, und es ist wiederum offenbar, daß dieser Quotient aus der vorigen Einheit ganz genommen, sich nicht zusammen setzen lasse. Daher kann in solchen Fällen der Quotient keine ganze Zahl seyn. Aber dieser Quotient läßt sich auf ähnliche Art aus einem aliquoten Theil der Einheit zusammen setzen, wie man sonst ganze Zahlen aus der ganzen Einheit zusammen setzt. Wollte man demnach diesen aliquoten Theil für sich als ein Ganzes betrachten; so könnte er als eine neue, von der vorigen unterschiedene Einheit angesehen werden. Insoferne wäre auch der Quotient als eine ganze Zahl anzusehen, nur daß hier die zusammengezählten Einheiten von den vorigen unterschieden seyn würden. Sieht man aber die zusammengezählten Stücke, als Theile des vorigen Ganzen an: so wird der Quotient eine Menge gleicher Theile dieses Ganzen ausdrücken, und in dieser Absicht ein Bruch seyn (4 §.).

54 §.

Man könnte also in Fällen von dieser Art so verfahren: Es müßte durch ein besonderes Wort z. E. Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. der aliquote Theil der Einheit angedeutet werden, welcher in dem Bruch etliche mahl enthalten ist: und so könnte man durch eine vorangesetzte Ziffer anzeigen, wie vielmahl derselbe in dem Bruch enthalten sey. Aber man hat es bequemer gefunden, statt dieser Wörter folgendes Zeichen zu gebrauchen. Man ziehet unter der 1 einen Strich, und setzt unter demselben die Ziffer, welche

welche andeutet, in wie viele gleiche Theile die Einheit einzutheilen sey, um diesen aliquoten Theil zu erhalten. Auf die Art bedeuten die Ausdrücke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. f. eben so viel, als die Wörter Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. Nun läßt sich jeder Bruch, den man aus einem solchen aliquoten Theil der Einheit zusammen setzt, so ausdrücken: Man schreibt statt der 1 über dem Strich die Ziffer, welche ausdrückt, wie vielmahl dieser aliquote Theil des Ganzen zusammen zu zählen sey. So bedeuten die Ausdrücke: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, eben so viel als 2 Drittel, 3 Viertel.

55 §.

Von dieser Art die Brüche zu bezeichnen hat man mehr als einen Vortheil. Einmal sind die Ausdrücke kürzer, als wenn man die vorhin angezeigten Worte gebrauchen wollte. Fürs zweyte behalten die Brüche die Natur ungenannter Zahlen, und jeder Bruch läßt sich mit einer ganzen Zahl vergleichen, wenn man voraussetzt, daß die Einheit, deren Theile der Bruch zusammenzählt, einerley sey mit der Einheit, woraus die ganze Zahl zusammen gesetzt ist. Uebrigens erhellet, daß sich jeder Bruch durch zwo ganze Zahlen ausdrücken lasse. Die eine davon zeigt an, in wieviele gleiche Theile die Einheit eingetheilt sey, und sie heißt der Nenner des Bruchs: die andre drückt aus, wie vielmahl derjenige aliquote Theil der Einheit, welcher durch diese Theilung herauskommt, in dem Bruch enthalten sey, und man nennt sie den Zähler des Bruchs. Es ist nothwendig, daß der Zähler des Bruchs kleiner, als sein Nenner sey. Man nennt inzwischen diejenigen eigentliche, oder wahre Brüche, auch ächte

Brüche

Brüche, deren Zähler kleiner, als der Nenner ist, die übrigen werden uneigentliche oder unächte Brüche genannt.

56 §.

Jeder Quotient zwoer ganzen Zahlen ineinander ist mit einem Bruch einerley, dessen Zähler das Dividendum und dessen Nenner der Divisor ist.

Beweis. Wenn das Dividendum kleiner, als der Divisor ist: so erhellet die Richtigkeit des Satzes p. 45. schon aus dem 53 §. Die dortigen Schlüsse lassen sich aber leicht allgemeiner machen. Das Dividendum mag so groß seyn, als es wolle, so kann man es allemahl in die einzelnen Einheiten zergliedern, daraus es bestehet. Wenn man nun jede Einheit mit dem Divisor theilt; so werden alle diese Quotienten p. 41. nicht nur gleich (44 §.), sondern es werden auch lauter aliquote Theile der Einheit. Die Summe aller dieser Quotienten ist der Quotient selbst, den das Dividendum in den Divisor getheilt geben muß. Aber eben diese Summe aller Quotienten ist ein Bruch, dessen Nenner ausdrückt, in wieviele aliquote Theile die Einheit getheilt worden; und dies war der Divisor: der Zähler aber, wieviele solcher aliquoten Theile die Summe ausmachen, und eben so viele Einheiten enthielte das Dividendum. Man soll z. E. 5 durch 3 dividiren: so ist $5:3. = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3$. Aber $1:3 = \frac{1}{3}$ (53 §.). p. 45. Also wird $5:3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

57 §.

Umgekehrt: Jeder Bruch ist mit einem Quotienten einerley, den der Zähler mit dem Nenner dividirt geben muß.

Beweis.

Beweis. Der Nenner des Bruchs drückt aus, es soll die Einheit in so viele gleiche Theile getheilt werden, als derselbe Eins enthält. So viel mahl nun der Zähler Eins enthält, so viele der vorhin genannten Theile machen den Bruch aus. Eben dies erhält man, wenn man jede Einheit des Zählers mit dem Nenner dividirt (53 §.), und alle Quotienten zusammen nimmt, deren so viele sind, als Einheiten im Zähler. Aber diese Summe ist einerley mit dem Quotienten, den die Division des ganzen Zählers mit dem Nenner giebt (48 §.). Also ist der Bruch selbst mit diesem Quotienten einerley. Z. E. der Bruch $\frac{5}{3}$ drückt aus, man soll den dritten Theil der Einheit 5 mahl nehmen. Aber der dritte Theil der Einheit ist $= \frac{1}{3} = 1 : 3$. Also ist $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 = 5:3$.

p. 45.

p. 43.

58 §.

Hieraus folgt eine sehr bequeme Art, die Division zu bezeichnen, der man sich sonst häufig statt der beyden Punkte (:) bedient. Man schreibe nemlich jeden Quotienten wie einen Bruch, dessen Zähler das Dividendum, und dessen Nenner der Divisor ist. Ueberhaupt wird man in der Folge Brüche statt Quotienten, und Quotienten statt Brüche setzen können, so lange Dividendum und Divisor, oder Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, und dieses voraus gesetzt, wird man sich leicht von der Richtigkeit folgender Sätze überzeugen.

Jeder uneigentliche Bruch ist entweder selbst eine ganze Zahl, wenn nämlich der Nenner dem Zähler gleich, odes ein aliquoter Theil desselben ist, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem eigentlichen Bruch. In dem letzten

Fall drückt der Quotient, den die Division des Zählers mit dem Nenner giebt, aus, wie vielmahl der ganze Divisor, und überdem ein aliquoter Theil desselben, im Dividendo enthalten sey.

59 §.

Das Dividendum bestehet aus einer oder zwoen Ziffern, und der Divisor ist eine einfache Ziffer, welche im letzten Fall grösser ist, als die höchste Ziffer des Dividendi: man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Wenn das Dividendum unter den Producten im Ein mahl eins vorkommt, und der Divisor einer von den beyden Factoren ist, welche durch die Multiplication dies Dividendum hervorbringen: so ist der Quotient allemahl der andre Factor. Deßwegen suche man das Dividendum in der Tabelle des 36 §. in einem solchen Fache auf, wo einer von den beyden Factoren, die dies Product durch die Multiplication hervorbringen, mit dem gegebnen Divisor einerley ist: so wird der andre Factor der gesuchte Quotient seyn (43 §.). Auf solche Art wird 8:4 den Quotienten 2, und 56:7 den Quotienten 8 geben.

Man ist wenigstens so lange genöthigt, diese Tabelle zu gebrauchen, bis man das Ein mahl Eins sich geläufig gemacht hat. Ist dies geschehen; so darf man nur die Producte des Divisors in die einfachen Ziffern in Gedanken durchlaufen, um bald auf das gegebene Dividendum zu kommen. Der Quotient ist diejenige Zahl, die durch die Multiplication in den Divisor das Dividendum hervorbringt.

II. Kommt das Dividendum unter den Producten im Ein mahl Eins nicht vor, oder, wenn dies gleich

wäre,

wäre, giebt es keinen unter den beyden Factoren deſſelben, der mit dem Diviſor einerley wäre; ſo nehme man das nächſt kleinere Product, welches obige Eigenſchaften hat, und dividire es nach der vorigen Regel, addire aber zum Quotienten einen Bruch, deſſen Zähler der Ueberſchuß des gegebenen Dividendi über das dividirte Product, und deſſen Nenner der Diviſor iſt (48. 56 §.). Soll man alſo z. E. 79 durch 8 dividiren: ſo wird die Rechnung am bequemſten ſo geführt. Man ſchreibt das Dividendum 79 nieder, und unter demſelben den Diviſor 8; ziehet aber keinen Strich unter dieſen Zahlen, wie bey den übrigen Rechnungsarten, ſondern zur Seiten, damit man den Quotienten auf der andern Seite des Strichs ſetzen könne, welches hier bequemer iſt. Nun findet ſich, daß 9 mahl 8 zwar nur 72, aber 10 mahl 8 ſchon 80 giebt, deßwegen iſt 9 ein Theil des Quotienten. Dieſen ſetzt man an der obgedachten Stelle hin, und multiplicirt den Diviſor 8 in den Quotienten 9.

79	$9\frac{7}{8}$
8	
72	
7	

89	$9\frac{9}{9}$
9	
81	
8	

Das Product 72 ſchreibt man unter den gegebenen Zahlen gehörig unter, und ſubtrahirt es vom Dividendo, ſo bleibt 7 zum Reſt: alſo kommt zum Quotienten der Bruch $\frac{7}{8}$ hinzu, daß man demnach den Quotienten eigentlich ſo ſchreiben müßte: $9 + \frac{7}{8}$. Aber man iſt gewohnt, hier das Zeichen + wegzulaſſen, und den Bruch unmittelbar anzuhängen.

Auf eben die Art findet man, daß 89 mit 9 dividirt, den Quotienten $9\frac{9}{9}$ giebt. In dem Fall,

wenn kein Rest bleibt, pflegte man sich so auszudrücken: Der Divisor gehe im Dividendo auf.

60 §.

Wenn die gegebenen Zahlen noch Ziffern von eben der Art, wie im vorigen §., dem Dividendo aber Nullen beygefügt sind: so findet man den Quotienten auf folgende Art. Ohne die Nullen anfangs in Betrachtung zu ziehen, dividirt man die Ziffern in einander, wie im vorigen §. Dafern nun der Divisor im Dividendo aufgeht, und also der gefundene Quotient eine ganze Zahl, ohne angehängten Bruch ist: so hängt man an demselben so viele Nullen, als dem Dividendo beygefügt waren. Auf diese Art wird 24000:6=4000. Denn es sey 24000:6 =Q: so ist 24000=Q×6 (44. 43 §.). Aber auch 24000=4000×6 (37 §.). Also Q×6= 4000×6 (11 §.), und Q=4000 (43. 44 §.) d. i. 24000:6.=4000. Dieser Beweis ist an die bestimmte Grösse der Zahlen gar nicht gebunden, und also allgemein.

61 §.

Wenn in eben dem Fall des vorigen §. der Divisor im Dividendo nicht aufgeht: so kann man ebenfalls, ohne Rücksicht auf die Nullen, den Theil des Quotienten, welcher eine ganze Zahl wird, nach der II. Regel des 59 §. suchen. Diesem fügt man so viele Nullen bey, als am Dividendo hängen. Hierauf multiplicirt man denselben in den Divisor, und subtrahirt das Product vom Dividendo, da denn der Rest noch ebenfalls mit eben demselben Divisore dividirt

vidirt werden muß. Es soll z. E. 270 durch 6 dividirt werden: so giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 40, und läßt zum Rest 30, also müßte zum Quotienten 40 noch der Bruch $\frac{30}{6}$ hinzukommen. Dividirt man aber 30 nochmahl durch 6: so erhält man 5 zum Quotienten, und es gehet alles auf. Addirt man nun beyde gefundene Theile: so wird der ganze Quotient 45. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß auf diese Art der Quotient allemahl richtig gefunden werde. Weil nämlich $270 - 240 = 30$ herauskömmt: so ist $270 = 240 + 30$ und $270 : 6 = 240 : 6 + 30 : 6 = 40 + 5 = 45$.

270	40
6	5
240	45
30	
6	
$\frac{30}{6}$	
30	
0	

62 §.

Wenn das Dividendum und der Divisor mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt werden: so ändert das den Quotienten nicht.

Beweis. Es sey $\frac{D}{d} = Q$: so wird $D = Q \times d$ (43 §.): folglich auch $D \times n = Q \times d \times n$, wenn n eine ganze Zahl ist (32 §.), und dieserwegen $\frac{D \times n}{d \times n} = Q = \frac{D}{d}$. Man setze $D : n = Y$, so ist $D = Y \times n$. Ferner sey $d : n = Z$, so ist $d = Z \times n$: folglich $\frac{D}{d} = \frac{Y \times n}{Z \times n}$. Demnach ist vermöge des schon bewiesenen ersten Satzes auch $\frac{D}{d} = \frac{Y}{Z}$.

63 §.

Eine Zahl mit angehängten Nullen wird mit 10 dividirt, wenn man eine Null weglöscht, mit 100, wenn man 2 Nullen weglöscht: man dividirt sie mit 1000 durch Hinwegstreichung dreyer Nullen, u. s. f. (37. 43 §.). Wenn demnach nicht allein am Dividendo, sondern auch am Divisore Nullen hängen, und wenn es mit den Ziffern noch übrigens eben die Bewandniß hat, wie im 59 §.; so kann man aus beyden gegebenen Zahlen so viele Nullen weglöschen, als im Divisor vorhanden sind, dadurch wird dieser Fall auf den vorigen des 60 §. gebracht. Hiebey wird vorausgesetzt, daß im Divisor nicht mehr Nullen als im Dividendo vorhanden sind. Wäre dies: so könnte man aus beyden Zahlen nur so viele weglassen, als das Dividendum enthält, und der Quotient wird sodann allemahl ein eigentlicher Bruch seyn. z. E. 6700:7000=67:70.=$\frac{67}{70}$. Ein Exempel der ersten Art aber wäre, wenn 590000 mit 8000 dividirt werden sollte. Man lasse hier gleich anfangs drey Nullen aus beyden Zahlen weg: so bleiben 590 mit 8 zu dividiren. Nun giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 70, und läßt zum Rest 30. Dividirt man diesen Rest nochmahl mit 8: so erhält man zum Quotienten 3, und es bleibt zum Rest 6. Deswegen kommt zum letzten Theil des Quotienten noch der Bruch $\frac{6}{8}$ hinzu. Weil man nun leicht wahrnimmt, daß Zähler und Nenner dieses Bruchs sich mit 2 dividiren lassen: so dividirt man würklich damit, und nimmt den Bruch $\frac{3}{4}$ statt $\frac{6}{8}$ (62. 57 §.).

590	70
8	$3\frac{3}{4}$
560	
30	
8	
24	
6	

64 §.

64 §.

Aus den beyden hier angeführten Stellen erhellet nämlich so viel, daß ein und eben derselbe Bruch sich auf unzählich viele andere verschiedene Arten ausdrücken lasse, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt. Aber durch die Division erhält man nicht allemahl ganze Zahlen zu Quotienten, so daß man dadurch auf Brüche kommen kann, deren Zähler und Nenner selbst wieder Brüche, oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen sind. Brüche von dieser Art heissen irreguläre, oder auch wohl gebrochene Brüche, so wie diejenigen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, reguläre Brüche heissen. Wenn es angeht, vermeidet man gerne die gebrochenen Brüche. Allemahl aber, wenn man bey der Division auf Brüche kommt, deren Zähler und Nenner sich durch eine und eben dieselbe ganze Zahl ohne Rest dividiren lassen; so nimmt man diese Division würklich vor, wenigstens, wenn sich leicht eine ganze Zahl, die in beyden aufgehet, ergiebet. Auf solche Art erhält man kleinere ganze Zahlen, die eben den Bruch ausdrücken, und dies ist in der Ausübung am bequemsten. Es wird unten eine Regel vorkommen, nach welcher man eine solche Zahl allemahl suchen kann, dafern es mit einer ganzen Zahl angehet.

65 §.

Wenn die höchste Ziffer des Dividendi im 59 §. nicht kleiner, als der Divisor ist; so wird der Quotient auf eine ähnliche Art, wie im 61 und 63 §. gefunden. Man setze, es soll die Zahl 89 mit 6 dividirt werden: so giebt es kein grösseres Product des

Divisors 6 in eine andre einfache Ziffer, als 54. Also könnte man die Rechnung so führen: Weil $9 \times 6 = 54$ ist, so nehme man 9 für den Quotienten an, und subtrahire das Product 54 vom Dividendo 89; so erhellet, daß der Ueberschuß 35 auch noch mit 6 dividirt werden, und dieser Quotient noch zu dem vorigen hinzukommen müsse. Dieser Quotient ist $5\frac{5}{6}$, welcher mit dem vorigen zusammen $14\frac{5}{6}$ giebt. Man theilt hier eigentlich die Zahl 89 in zwey Stücke, in 54, und 35, und dividirt jedes Stück für sich durch 6. Aber es ist am bequemsten, das Dividendum in die Theile zu vertheilen, welche die Ziffern der verschiedenen Ordnungen von selbst ergeben, und das sind hier die Theile 80 und 9. Man schreibe also den Divisor 6 zuerst unter der höchsten Ziffer 8, und nehme an, es sey 80 das Dividendum; so wird der Quotient 10 (61 §.). Das Product $6 \times 10 = 60$ subtrahire man vom ganzen Dividendo, so bleiben 29. Wenn man auch diesen Rest mit 6 dividirt; so erhält man $4\frac{5}{6}$, also wie vorhin $14\frac{5}{6}$ zum ganzen Quotienten. Man hätte hier die 0 bey der 10 im Quotienten weglassen, und statt derselben gleich den folgenden Theil des Quotienten 4 hinschreiben können. In der That kann man sich bey dieser Theilung des Dividendi in die Stücke, welche die Ziffern verschiedener Ordnungen ausdrücken, einer solchen Verkürzung allemahl bedienen: denn es ist offen-

89	9
6	$5\frac{5}{6}$
54	$14\frac{5}{6}$
35	
6	
30	
5	

89	10
6	$4\frac{5}{6}$
60	
29	
6	
24	
5	

offenbar, daß der folgende Theil des Quotienten durch eine Ziffer der nächst niedern Ordnung wird ausgedrückt werden. Eben dieser Vortheil läßt sich anbringen, wenn auch das Dividendum aus mehr als zwoen Ziffern besteht.

66 §.

Das Dividendum ist aus so vielen einfachen Ziffern, als man will, zusammengesetzt, und der Divisor eine einfache Ziffer, man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Man vertheile in Gedanken das Dividendum in diejenigen Theile, welche die Ziffern verschiedener Ordnungen desselben ausdrücken. Ist die erste Ziffer im Dividendo kleiner, als im Divisor; so rechne man zum höchsten Theil zwey Ziffern, im Gegentheil aber nur eine.

II. Nun verfahre man mit den verschiedenen Stücken des Dividendi nach einander eben so, wie mit den zweenen Theilen des Dividendi im vorigen §. ist verfahren worden: so findet man nach einander die Ziffern des Quotienten von der höchsten bis zur niedrigsten, wie im beygefügten Exempel. Die Zahl 3 in 80000 dividirt giebt 20000. Das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 60000, und dieses vom ganzen Dividendo abgezogen läßt zum Rest 27642, welcher noch durch 3 zu dividiren ist. Man dividirt also 3 in 27000, weil die erste Ziffer des Dividendi kleiner als 3 ist, so erhält man 9000. Das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 27000, welches vom Dividendo abgezogen,

87642	20000
3	9000
60000	200
27642	10
3	4
27000	29214
642	
3	
600	
42	
3	
30	
12	
3	
12	
0	

den Rest 642 giebt. Nun dividirt man 600 mit 3, welches 200 giebt, und das Product 600 = 200 × 3 vom Dividendo abgezogen, läßt 42. Demnach sind noch 40 durch 3 zu dividiren, welches 10 giebt, und das Product 10 × 3 abgezogen läßt 12. Dieser Rest aufs neue mit 3 dividirt giebt den letzten Theil 4.

Hier fällt nun sogleich in die Augen, daß es nicht nöthig gewesen wäre, die Theile des Quotienten mit den zugehörigen Nullen untereinander hin zu setzen, und sie zuletzt erst zu addiren. Man kann die Ziffern ohne die Nullen beyzufügen allemahl in einer Reihe bey einander hinsetzen: so würde im Exempel der Quotient 29214 sich sogleich von selbst ergeben haben. Aber auch bey der übrigen Rechnung ist es nicht nöthig, die Nullen den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten beyzufügen, wenn man nur die Ziffern allemahl in der gehörigen Stelle setzt. Denn es fällt in die Augen, daß bey jeder Subtraction mit den Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen zu stehen kommen, weiter keine Veränderung vorgehe, als daß man sie unter dem gezogenen Strich herunter setzt. Dies kann aber geschehen, ohne daß die Nullen würklich hingeschrieben sind. Ja weil selbst das Abschreiben dieser Ziffern Zeit wegnimmt, und man bey jeder folgenden Operation nur die nächst niedrige Ziffer des Dividendi gebraucht; so ist nur nöthig, nachdem das Product des jedesmahl gefundenen Theils vom Quotienten in den Divisor, ohne den dazu gehörigen Nullen, unter den Ziffern des Dividendi von eben der Ordnung hingeschrieben, und von denselben abgezogen worden, die nächst folgende Ziffer des Dividendi herunter,

und

und rechter Hand, neben dem übrig gebliebenen Rest zu setzen. Bey den nachstehenden Exempeln sind diese Verkürzungen angebracht.

5 8 3 0 9 6 3 | 832994 5/7
7
56
23
7
21
20
7
14
69
7
63
66
7
63
33
7
28
5

4 6 2 8 0 4 | 115701
4
6
4
22
4
20
28
4
28
4
4
0

Im zweyten Exempel kommen einige besondre Fälle vor, die einige Erläuterung verdienen, weil man bey denselben ohne Noth Umwege nehmen würde, wenn man sich ganz genau an die vorigen Regeln halten wollte. Zuerst giebt 4 durch 4 dividirt, den Quotienten 1. Das Product aus diesem Quotienten in den Divisor, ist auch 4, daher braucht man es nicht nochmahl niederzuschreiben; sondern man kann nur

gleich

gleich den Divisor selbst subtrahiren. Ferner giebt 6 durch 4 dividirt, auch 1, also kann man wie vorhin verfahren, und es überhaupt allemahl so machen, wenn der gefundene Theil des Quotienten 1 ist.

Die vierte Ziffer des Quotienten 7, erhielte man durch die Division von 28 durch 4. Das Product 7 × 4 ist 28, und wenn man dies subtrahirt, bleibt nichts übrig. Die folgende Ziffer des Dividendi ist auch 0, wenn man also gleich diese herunter setzt, so kann man doch mit 4 noch nicht dividiren: deßwegen ist diese Classe ganz übergangen, und davor in der zugehörigen Stelle des Quotienten 0 hingeschrieben, und zwar aus folgender Ursache. Die nun folgende Ziffer im Dividendo ist um zwey Ordnungen niedriger, als die vorige 8 war, darum wird der zugehörige Theil des Quotienten ebenfalls um zwey Ordnungen niedriger werden (60. 61 §.). Dies erhält man nun durch die demselben vorangesetzte 0. Beym gewöhnlichen Rechnen würde man sagen: 4 in 0 hat man 0 mahl, und dies ist ein gutes Hülfsmittel, es hier nicht zu versehen. Wenn an der Stelle der 0 zwar eine Ziffer, aber eine solche stünde, die kleiner als der Divisor wäre: so würde aus einer ähnlichen Ursache in die zugehörige Stelle des Quotienten eine 0 kommen, wie in dem beygefügten Exempel. Man sagt auch hier: 9 in 3 hat man 0 mahl. Es ist dies eigentlich der Fall, da im übrig gebliebenen Stück des Dividendi die höchste Ziffer des Dividendi kleiner als der Divisor ist, und daher würde sich, wenn man völlig

7234		803 7/9
9		
72		
34		
9		
27		
7		

lig nach der Regel dieses §. verfahren wollte, alles von selbst ergeben. Weil dies aber bequeme practische Verkürzungen sind: so war es nicht undienlich, sie besonders anzumerken.

67 §.

Wenn der Divisor zwar eine einfache Ziffer ist, aber an derselben Nullen hängen, und am Ende des Dividendi sich eben so viele, oder mehrere nach einander befinden; so läßt man in beyden so viele weg, als im Divisor stehen, und kann übrigens nach den Regeln des vorigen §. verfahren (62. 63.)

68 §.

Das Dividendum sowohl als der Divisor sind zusammengesetzte Ziffern, jedoch ist der Divisor kleiner, als das Dividendum: man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Man nehme in Gedanken vom Dividendo so viele der höchsten Ziffern desselben ab, als der Divisor enthält, und vergleiche diese für sich allein mit dem Divisor nicht anders, als wenn alle folgende Ziffern im Dividendo fehlten.

II. Wofern diese höchsten Ziffern des Dividendi für sich allein eine Zahl ausmachen, die eben so groß oder noch grösser als der Divisor ist; so schreibe man den Divisor unter dem Dividendo so, daß die höchste Ziffer desselben unter der höchsten Ziffer des Dividendi zu stehen kommt. Wofern aber der Theil des Dividendi, welcher mit dem Divisor aus einer gleichen Anzahl von Ziffern bestünde, kleiner als der Divisor ist; so setze man die höchste Ziffer des Divisors unter der zweyten Ziffer des Dividendi.

III. Nun nehme man an, daß statt aller Ziffern, die im Divisor nach der höchsten, und im Dividendo nach derjenigen folgen, unter welcher die höchste Ziffer des Divisors gesetzt ist, Nullen stehen, und suche den Quotienten nach der Regel des 63 §. Diesen Quotienten multiplicire man in den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividendo ab.

IV. Diese Regel kann den Quotienten zu groß geben, weil man den Divisor kleiner, als er würklich ist, angenommen hat. Allein in dem Fall wird das nach eben dieser Regel gefundene Product grösser, als das Dividendum seyn, und sich nicht abziehen lassen. Deswegen muß man die so gefundene Ziffer des Quotienten so lange um Eins vermindern, bis das Product so klein wird, daß man es abziehen kann.

V. Den übrig gebliebenen Rest dividirt man, wie zuvor, mit eben dem Divisor, und fährt so lange damit fort, bis man auf einen Rest kommt, der kleiner, als der Divisor ist: da man denn zu den gefundenen und in eine Summe gebrachten Theilen des Quotienten noch einen Bruch setzt, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist.

VI. Dafern übrigens statt einiger der letzten Ziffern in den gegebenen Zahlen Nullen stehen: so löscht man, bevor die Rechnung angefangen wird, in beyden so viele weg, bis man in einer von beyden an die niedrigste Ziffer kommt (62.63.).

Das beygefügte Exempel ist so berechnet: 2 in 7 dividirt würde 3 geben, und so erhielte man zum Quotienten 300. Aber das Product $278 \times 300 = 83400$

=83400 ist grösser als das Dividendum, deßwegen nimmt man nur 200. Das Product 278 × 200 = 55600 vom Dividendo abgezogen, giebt den Rest 23334. Unter diesen schreibt man den Divisorem so, daß seine höchste Ziffer unter der nächst höchsten des Restes komt, weil 233 < 278 ist, nach der zweyten Regel. Nun würde 2 in 23 dividirt, den Quotienten 9 geben,

78934	200
278	80
55600	$3\frac{260}{278}$
23334	$283\frac{260}{278}$
278	
22240	
1094	
278	
834	
260	

er ist aber wegen der vorhin schon vorgekommenen Ursache zu groß, also wird der zweyte Theil des Quotienten 80, das Product 278 × 80 vom vorigen Rest abgezogen, giebt den neuen Rest 1094. Man schreibt unter denselben den Divisor, wie vorhin, weil 109 < 278 ist. Ob nun gleich 2 in 10 dividirt den Quotienten 5 geben könnte: so darf man ihn hier doch nicht grösser, als 3 nehmen, da denn das Product 278 × 3 = 834, vom vorigen Rest abgezogen, den letzten Rest 260 giebt, welcher schon kleiner, als der Divisor ist.

Man kann hier alle die practischen Vortheile anbringen, deren im vorigen 65 §. Erwehnung geschehen ist. Einmahl hat man nicht nöthig den Theilen des Quotienten die ihnen zugehörige Nullen beyzufügen, und diese Theile am Ende allererst in eine Summe zu bringen. Man kann diese Theile nach einander in einer Reihe sogleich hinschreiben, weil der folgende

gende Theil nothwendig allemahl eine Ziffer der nächst niedrigen Ordnung ist. Ferner ist es nicht nothwendig, den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten, die ihnen zukommenden Nullen beyzufügen, wenn man nur die Ziffern derselben allemahl gehörig unter diejenigen Ziffern des Dividendi setzt, die mit ihnen zu einerley Ordnung gehören. Weil überdem die Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen stehen müßten, wenn man sie beyfügen wollte, durch die Subtraction dieser Producte weiter keine Veränderung leiden, als daß man sie unter den gezogenen Strich herunter setzt; und weil bey jeder folgenden Operation nur die nächst niedrige Ziffer des Dividendi, eine Aenderung leidet: so ist nur nöthig, nachdem die Ziffern des Products von den drüber stehenden Ziffern des Dividendi sind abgezogen worden, die nächste Ziffer des Dividendi herunter, und rechter Hand neben dem Rest, unter den Strich zu setzen. Auf diese Art ist die Berechnung folgender Exempel verkürzt worden, die man nun leicht nachrechnen wird.

Im ersten von diesen beyden Exempeln bleibt nach der Subtraction des Products aus dem ersten Theil des Quotienten in den Divisor, der Rest 1945. Wenn man hiezu die nächst folgende Ziffer des Dividendi nimmt: so hat man die Zahl 19456, und diese ist noch kleiner, als der Divisor. Also muß man noch eine Ziffer zunehmen, und dafür eine o im Quotienten hinzuschreiben, denn der folgende Theil des Quotienten wird nun um zwey Ordnungen niedriger, als der vorige war.

5949826437 | 90295 $\frac{1}{6}\frac{8}{5}\frac{0}{8}\frac{0}{9}\frac{2}{3}$

65893

593037

19456 4

65893

13178 6

627783

65893

593037

347467

65893

32946 5

18002

6852330870247 | 10021705 $\frac{98202}{6837749}$

6837 49

1484087

6837 49

1367498

1165890

6837 49

4821412

6837 49

4786243

3516947

6837 49

3418745

98202

Im zweyten Exempel ist der erste Rest 1484, welcher nur aus 4 Ziffern bestehet. Da nun der Divisor noch grösser bleibt, wenn man gleich zwey der folgenden Ziffern zunimmt: so kommen dafür zwey Nullen im Quotienten. Weil man nämlich noch die dritte Ziffer zunehmen muß; so wird der folgende Theil des Quotienten um drey Ordnungen niedriger, als der vorige war. Wenn man ohne practische Verkürzung blos nach den dreyen ersten Regeln dieses §. rechnet, den Theilen des Quotienten die ihnen zugehörigen Nullen beyfügt, und sie, wie es die Regeln der Addition erfordern, untereinander setzt: so fällt die Ursache, warum man vorhin beschriebner massen verfahren muß, desto deutlicher in die Augen.

69 §.

Die Division dient der Multiplication zur Probe. Denn wenn man das Product durch den einen Factor dividirt; so muß der andre der Quotient werden: widrigenfalls ist bey der Multiplication gewiß ein Fehler vorgegangen, dafern man anders richtig dividirt hat. Umgekehrt dient also auch die Multiplication zur Probe der Division. Wenn man den Quotienten, dafern er eine ganze Zahl ohne angehängten Bruch ist, mit dem Divisor multiplicirt; so muß das Dividendum wieder herauskommen. Geschicht dies nicht, und man ist versichert, daß man richtig multiplicirt habe: so ist gewiß beym dividiren ein Fehler vorgegangen (43 §.). Dafern aber der Quotient einen Bruch bey sich hat; so wird das Product aus dem Divisor in den ganzen Theil des Quotienten das Dividendum, weniger den letzten Rest geben müssen. Wenn man also diesen Rest zu jenem Product addirt:

so

so muß die Summe das Dividendum seyn. Man hat mancherley andre Methoden, die vier Rechnungsarten zu prüfen, oder bey einem Exempel die sogenannte Probe zu machen, die sich hier aber nicht ohne zu viele Weitläuftigkeit erklären lassen. Verschiedene Eigenschaften der Zahlen, worauf sie sich gründen, werden in der Folge allererst vorkommen, andre aber können hier gar nicht berührt werden.

Uebrigens drückt man gerne, wenn es angehet, die herausgebrachten Brüche durch ihre kleinsten Zahlen aus. Wie man sich dabey zu verhalten habe, werden folgende Lehren zeigen.

Der V. Abschnitt.

Von dem Unterscheid der Prim-Zahlen, und zusammen gesetzten Zahlen.

70 §.

Wenn eine ganze Zahl A durch eine andre ganze Zahl *n* sich ohne daß ein Rest bleibt theilen läßt: so sagt man: *n* messe A, (*n* metitur A) oder A sey durch *n* theilbar. Man redet der Kürze wegen so, damit man nicht allemahl den Zusatz, ohne Rest, beyzufügen nöthig habe. Wenn bey den folgenden Untersuchungen von Zahlen die Rede seyn wird, davon die eine durch die andre theilbar, oder nicht theilbar ist: so werden allemahl ganze Zahlen verstanden werden.

71 §.

Wenn zwey ganze Zahlen durch eine dritte ohne Rest theilbar sind: so ist ihre Summe

sowohl, als auch ihre Differenz, durch eben die Zahl theilbar.

Beweis. Es sollen die beyden ganzen Zahlen A und B durch die dritte n theilbar seyn, so, daß $\frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ ganze Zahlen sind: so erhellet, daß $\frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ sowohl, als auch $\frac{A}{n} - \frac{B}{n}$, wenn $B < A$ ist, eine ganze Zahl sey, weil nicht allein die Summe, sondern auch die Differenz zwoer ganzen Zahlen gewiß eine ganze Zahl ist. Aber $\frac{A+B}{n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ (48 §.): also ist auch $\frac{A+B}{n}$ eine ganze Zahl. Weil ferner $\frac{A-B}{n} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n}$ (49 §): so ist ebenfalls $\frac{A-B}{n}$ eine ganze Zahl.

72 §.

Wenn von zwoen Zahlen, A und B, zwar die eine A durch eine dritte Zahl n theilbar ist, aber die andre B ist durch eben diese dritte Zahl n nicht theilbar: so ist auch jener Summe $A + B$ oder ihre Differenz $A - B$ durch diese dritte Zahl n nicht theilbar.

Beweis. Die Summe einer ganzen Zahl und eines ächten Bruchs kann keine ganze Zahl seyn. Auch ist die Differenz einer ganzen Zahl und eines ächten Bruchs nie eine ganze Zahl. Weil nun der

Voraus-

Voraussetzung gemäß $\frac{A}{n}$ eine ganze Zahl ist, $\frac{B}{n}$ aber ein ächter Bruch, oder statt dessen eine vermischte Zahl, die aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch bestehet: so kann weder $\frac{A+B}{n}$, noch auch $\frac{A-B}{n}$ eine ganze Zahl seyn.

73 §.

Wenn $A+B$ sowohl, als auch A durch n theilbar ist: so muß auch B durch n theilbar seyn. Wenn dagegen die Summe $A+B$ mit n theilbar ist, und diese Zahl in A nicht aufgeht; so geht sie auch in B nicht auf.

Beweis. Man setze $A+B=S$, so ist $B=S-A$. Demnach geht B mit n auf, wofern S und A mit n aufgehen. (71. §.) Wenn dagegen n in S aufgeht, und nicht in A, so geht n auch nicht in B auf. (72. §.)

74 §.

Wenn A und B jede für sich durch n nicht theilbar sind; so wird $A+B$ durch n theilbar seyn, wenn die Summe der Reste, welche die Divisionen $A:n$ und $B:n$ geben, dem Divisor n gleich ist: widrigenfalls wird $A+B$ durch n nicht theilbar seyn. Ferner wird auch $A-B$ durch n theilbar seyn, wenn jene Reste gleich sind: widrigenfalls wird $A-B$ durch n nicht theilbar seyn.

Beweis I. Es gebe $\frac{A}{n}$ den ganzen Quotienten

Q und lasse den Rest R; eben so gebe $\frac{B}{n}$ den Quotienten q und lasse den Rest r. Diesen Voraussetzungen gemäß ist $A = Q \times n + R$, und $B = q \times n + r$; also $A + B = Q \times n + q \times n + R + r = (Q+q) \times n + R + r$. Wenn nun $R + r = n$ ist; so ist diese Summe durch n theilbar (71 §.). Wenn aber $R + r$ nicht $= n$ ist, so ist doch $R < n$ und $r < n$, also $R + r < 2n$ (25 §.) Demnach wird diese Summe durch n nicht theilbar seyn (72 §).

II. Weil ferner $A - B = (Q - q) \times n + R - r$: so ist $A - B$ durch n theilbar, wenn $R - r = 0$, oder $R = r$ ist. Wofern aber $R > r$ ist, so wird $R - r < R$ also durch n nicht theilbar, folglich auch $A - B$ durch n nicht theilbar seyn (72 §.). Wenn $r > R$ ist, so wird $r - R < r$, und $r < n$, also $r - R < n$, folglich $(r - R)$ durch n nicht theilbar seyn. Oben war $A - B = (Q - q) \times n + R - r$, also ist auch $A - B + r - R = (Q - q) \times n$: folglich ist die Summe der beyden Zahlen $A - B$ und $r - R$ mit n theilbar. Weil aber $r - R$ nicht mit n theilbar ist, so ist $A - B$ ebenfalls nicht mit n theilbar. (73. §.)

75 §.

Wenn mehr, als zwo Zahlen A, B, C, u. s. f. durch n theilbar sind: so ist auch ihre Summe durch n theilbar. Wenn sie aber nicht alle durch n theilbar sind; so ist ihre Summe nur alsdenn durch n theilbar, wenn die Summe der Reste, welche die Divisionen von $A, B, C,$ u. s. w. durch n geben, durch n theilbar ist.

Beweis. Der erste Satz läst sich eben so, wie der erste Satz des 71 §. beweisen. Der zweyte Satz erhel-

erhellet aus folgenden Gründen. Wenn Q, q, R, r, eben das, wie im vorigen §. bedeuten: und C durch n dividirt den ganzen Quotienten K giebt, und k zum Rest läßt, so hat man

$$A = Q \times n + R$$
$$B = q \times n + r$$
$$C = K \times n + k.$$

Also $A+B+C = (Q \times q + K) \times n + R + r + k$. Ist also $R+r+k$ durch n theilbar: so ist es auch $A+B+C$ (71 §.), und wenn dies nicht ist: so ist auch $A+B+C$ nicht durch n theilbar (72 §.)

Weil der Rest allemahl kleiner als der Divisor ist, so kann man ihn vom Divisor abziehen, und was übrig bleibt das Complement des Restes zum Divisor nennen. (19 §.) Man setze $n-R=C$, $n-r=c$, $n-k=\mathfrak{C}$; so ist $R+C=n$, $r+c=n$, $k+\mathfrak{C}=n$, und die Summe $R+C+r+c+k+\mathfrak{C}$ ist durch n theilbar. Wenn demnach die Summe der Complemente $C+c+\mathfrak{C}$ durch n theilbar ist: so muß auch die Summe der Reste (73 §.), und eben darum zugleich die Summe $A+B+C$ durch n theilbar seyn.

Wenn die Zahl n in der Summe $C+c+\mathfrak{C}$ nicht aufgeht, so geht sie auch nicht in der Summe $R+r+k$ auf: (73 §.) mithin geht sie eben darum auch nicht in der Summe der Zahlen $A+B+C$ auf.

76 §.

Wenn ein Factor A des Products $A \times B$ durch eine Zahl n theilbar ist: so ist auch das Product $A \times B$ durch n theilbar.

Beweis. Das Product $A \times B$ ist die Summe so vieler A, als B Eins enthält (30 §.) Wenn also jedes

jedes A durch n theilbar ist: so ist es auch $A \times B$. (75 §.)

77. §.

Wenn kein Factor des Products $A \times B$ durch n theilbar ist, sondern A mit n dividirt den Rest R, und B mit n dividirt den Rest r übrig läßt: so ist $A \times B$ durch n nur alsdenn theilbar, wenn $R \times r$ durch n theilbar ist.

Beweis. Es ist vermöge der Voraussetzung $A = Q \times n + R$ und $B = q \times n + r$, wenn Q und q die Quotienten bezeichnen, soweit sie in ganzen Zahlen gefunden werden. Demnach ist ferner $A \times B = (Q \times n + R)\, q \times n + Q \times n \times r + R \times r$. Weil nun $(Q \times n + R)\, q \times n + Q \times n \times r$ mit n theilbar ist, so ist $A \times B$ mit n nur alsdenn theilbar, wenn $R \times r$ mit n theilbar ist (71. 72 §.)

78 §.

Wenn zwo, oder mehr Zahlen, A, B, C, D, u. s. f. durch eine und eben dieselbe Zahl n theilbar sind; so heißt n das gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A, B, C, D, u. s. f. Solche Zahlen, die kein andres gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben, werden unter sich einfache Zahlen (numeri inter se primi) genannt. Ueberhaupt aber heißt eine Zahl eine einfache, oder Primzahl, (numerus primus) wenn sie zwar mit sich selbst und mit Eins dividirt aufgehet, sonst aber mit keiner andern Zahl ohne Rest theilbar ist. Ein Product, welches aus solchen Primzahlen durch die Multiplication entstanden ist, betrachtet man als eine Zahl, die aus den Primzahlen als einfachen Factoren durch die Multiplication zusammengesetzt ist.

79 §.

79 §.

Zahlen, die durch 2 theilbar sind, heissen grade Zahlen, die übrigen, welche durch 2 getheilt 1 zum Rest lassen, nennt man ungrade Zahlen. Die Zahl 2 ist eine grade Zahl, und zugleich eine Primzahl (78 §.). Alle übrige Primzahlen, sind ungrade Zahlen: denn jede grade Zahl, 2 ausgenommen, hat wenigstens den Factor 2. Es giebt auch viele ungrade Zahlen, die keine Primzahlen sind, z. E. 9, 15, u. s. f. Daher gilt der Satz nicht umgekehrt. Jede grade Zahl läßt sich durch $2m$, und jede ungrade Zahl durch $2m+1$ ausdrücken, was auch m für eine ganze Zahl bedeute, und hieraus schließt man leicht folgende Sätze.

I. Die Summe sowohl, als auch die Differenz nicht nur zwoer graden, sondern auch zwoer ungraden Zahlen, ist eine grade Zahl (71. 74 §.): die Summe und Differenz einer graden und ungraden Zahl aber ist eine ungrade Zahl (72 §.).

II. Das Product zwoer graden Zahlen sowohl, als auch das Product einer graden Zahl in eine ungrade, ist eine grade Zahl (76 §.). Aber das Product zwoer ungraden Zahlen in einander, ist eine ungrade Zahl (77 §.)

80 §.

Wenn zwo Zahlen A und B ungleich sind, und wenn die grössere A durch die kleinere B theilbar ist: so ist die kleinere B das größte gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen A und B.

Dieser Satz ist für sich klar.

Wenn aber *A* durch *B* nicht theilbar ist: so kann das grösste gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen nicht grösser seyn, als der Rest *R*, welcher übrig bleibt, wenn *A* mit *B* dividirt wird.

Beweis. Es sey Q der Quotient, so weit er in ganzen Zahlen gefunden wird, wenn man A mit B dividirt: so ist $A = Q \times B + R$. Wenn nun B durch die Zahl *n* theilbar ist; so ist auch $Q \times B$ durch *n* theilbar (76 §.) Also kann A nicht durch *n* theilbar seyn, wenn R nicht durch *n* theilbar ist (72 §.), und deßwegen kann *n* nicht grösser, als R seyn, wenn A sowohl als B dadurch theilbar sind.

81 §.

Wenn *B* durch *R* theilbar ist; so ist *R* das grösste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen *A* und *B*.

Beweis. Weil $A = Q \times B + R$ ist: so folgt die Richtigkeit des Satzes aus dem 71. 76 und 80 §., denn R ist durch sich selbst theilbar.

82 §.

Wenn *B* durch *R* nicht theilbar ist: so ist das grösste gemeinschaftliche Maaß von *B* und *R* auch zugleich das grösste gemeinschaftliche Maaß von *A* und *B*.

Beweis. Es sey *n* das grösste gemeinschaftliche Maaß von B und R, und man setze, A und B hätten das Maaß *m*, so daß $m > n$ wäre: so müßte auch *m* ein Maaß von $Q \times B$ seyn (76 §.); folglich auch von R (73 §.). Demnach hätten B und R ein gemeinschaftliches Maaß, das grösser wäre, als *n*, wider die Voraussetzung.

83 §.

83 §.

Wenn *B* durch $B-R$ theilbar ist: so ist auch *A* durch $B-R$ theilbar.

Beweis. Weil $A=Q\times B+R$: so addire man $B-R$ auf beyden Seiten, und es wird $A+B-R=Q\times B+B$. Ist nun B durch $B-R$ theilbar: so ist auch $B-R$ ein Maaß von $Q\times B+B$ (76. 71 §.), also von $A+B-R$, mithin auch von A (73 §.).

84 §.

Wenn *R* nicht selbst das gröβte gemeinschaftliche Maaß von *A* und *B* ist; so kann dasselbe nicht grösser, als $B-R$ seyn.

Beweis. Es sey *n* das gröβte gemeinschaftliche Maaß von A und B: so ist *n* ein Maaß von $Q\times B+B$ (76. 71 §.); folglich von $A+B-R$ (83 §.). Weil ferner *n* ein Maaß von A seyn soll: so ist *n* auch ein Maaß von $B-R$ (73 §.): also kann *n* nicht gröβer, als $B-R$ seyn.

85 §.

Es sind zwo ungleiche Zahlen gegeben, man soll ihr gröβtes gemeinschaftliches Maaß suchen.

Aufl. I. Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere: wenn alles aufgeht, so ist die kleinere selbst das gröβte gemeinschaftliche Maaß. (80 §.) Z. E. man hat die Zahlen 12 und 36: so geht 12 in 36 auf, also ist 12 das gröβte gemeinschaftliche Maaß von 12 und 36.

II. Wenn die kleinere Zahl in der grössern nicht aufgeht: so dividire man die kleinere Zahl mit dem Rest. Geht nun alles auf; so ist dieser Rest das gesuchte gröβte Maaß (81 §.). Z. E. man hat die Zahlen 12 und 28, wo 28 durch 12 dividirt, den

Rest

Rest 4 läßt, und 4 in 12 aufgeht: also ist 4 das gesuchte Maaß.

III. Wenn der Rest in der kleinern Zahl nicht aufgeht: so kann das gesuchte Maaß nicht grösser seyn, als die Differenz dieses Restes von der kleinern Zahl, oder welches einerley ist, das Complement dieses Restes zur kleinern Zahl (84 §.). Wenn demnach dieser Rest grösser, als die Hälfte der kleinern Zahl ist: so subtrahire man ihn von der kleinern Zahl, und dividire die kleinere Zahl mit der gefundenen Differenz. Wenn alles aufgehet: so ist diese Differenz das gesuchte Maaß (83 §.). Z. E. man hat die Zahlen 12 und 32, wo 32 durch 12 dividirt, den Rest 8 läßt. Dieser ist größer, als die Hälfte von 12, also subtrahire man ihn: so wird die Differenz 4, aber 4 in 12 gehet auf, also ist 4 das gesuchte Maaß.

Man hätte eben dieses Maaß auch so finden können. Weil 8 in 12 nicht aufgeht; so ist das gröste gemeinschaftliche Maaß von 8 und 12 zugleich das gröste Maaß von 32 und 12 nach der I. und II. Regel. Weil nun 8 in 12 dividirt, zum Rest 4 läßt, und 4 in 8 aufgeht: so ist 4 das gesuchte Maaß. Aber, daß der Versuch der Division von 12 durch 8 vergeblich seyn würde, konnte man zum voraus wissen.

Hieraus folgt nun die gewöhnliche allgemeine Regel:

Man dividire die gröste Zahl durch die kleinste. Bleibt ein Rest; so dividire man damit den vorigen Divisor. Bleibt wieder ein Rest; so dividire man damit abermal den letzten Divisor, und fahre so fort, bis alles aufgeht: so

wird

wird der letzte Divisor das gesuchte gemeinschaftliche Maaß seyn.

Diese Regel giebt gewiß richtig das Gesuchte Maaß, aber man kann oft einige Divisionen ersparen, wenn man nach der III. Regel nicht mit dem Rest, dafern er grösser, als die Hälfte des letzten Divisors ist; sondern mit seiner Ergänzung zum letzten Divisor aufs neue dividirt. Es sollen zum Exemp. 28829 und 104775 die gegebenen Zahlen seyn. Die erste Division giebt den Rest 18288, und man sieht leicht, daß derselbe grösser, als die Hälfte von 28829 sey. Deßwegen dividirt man mit dem Complement 10541 in den vorigen Divisor; so bleibt der Rest 7747, der abermahl grösser, als die Hälfte des Divisors ist. Die abermahlige Division durch sein Complement 2794 giebt 2159 zum Rest, und sein Complement ist 635.

Die neue Division durch dies Complement läst 254 zum Rest. Weil dieser Rest kleiner, als die Hälfte vom letzten Divisor 635 ist; so dividirt man mit diesem Rest selbst in den letzten Divisor, und es bleibt zum Rest 127. Dieser ist grade die

104775	3	
28829		
86487		
18288		
10541	Compl.	
28829	2	
10541		
21082		
7747		
2794	Compl.	
10541	3	
2794		
8382		
2159		
635	Compl.	
2794	4	
635		
2540		
254		
635	2	
254		
508		
127		

Hälfte

Hälfte von 254. Demnach ist 127 das gesuchte gemeinschaftliche Maaß.

Wenn bey diesem Verfahren 1 zum Rest kommt: so ist es ein Beweis, daß die gegebenen Zahlen kein andres gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben, also Primzahlen unter sich sind (78 §.).

86 §.

Wenn man zwo Zahlen mit ihrem gemeinschaftlichen grösten Maaß dividirt: so sind die Quotienten Primzahlen unter sich.

Beweis. Es sey m das gröste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B und $\frac{A}{m} = Q$, $\frac{B}{m} = q$: so ist $A = Q \times m$ und $B = q \times m$. Wären nun Q und q keine Primzahlen unter sich; so müßten sie noch ein andres gemeines Maaß n haben. Es sey demnach $\frac{Q}{n} = K$ und $\frac{q}{n} = k$: so wäre $Q = K \times n$, und $q = k \times n$, also $A = K \times n \times m$ und $B = k \times n \times m$. Demnach hätten A und B das gemeine Maaß $n \times m$, welches grösser, als m ist, wider die Voraussetzung.

87 §.

Aus zweyen gleich grossen Producten $a \times \beta = \alpha \times b$ erhält man ein Paar gleich grosse Brüche $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, wenn man aus jedem dieser Producte einen Factor für den Zähler annimmt, und die andern beyden Factoren als Nenner, aber in umgekehrter Ordnung darunter setzt.

Um-

Umgekehrt: wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern Bruch $\frac{a}{\beta}$ gleich ist, und man multiplicirt den Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern; so sind die Producte, $a \times \beta$ und $a \times b$, gleich groß. Auch muß derjenige von diesen gleichen Brüchen, der den grössern Nenner hat, einen grössern Zähler haben, als der andre Bruch der den kleinern Nenner hat. Wenn dagegen die Nenner gleich groß sind, so müssen auch die Zähler gleich groß seyn.

Beweis. I. Es ist vermöge des 64 §. $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{a}{b}$, und $\frac{a \times b}{\beta \times b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Nun wird vorausgesetzt, daß $a \times \beta = a \times b$ sey, und es ist $b \times \beta = \beta \times b$ (33 §.) folglich $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{a \times b}{\beta \times b}$, (44 §.) also auch $\frac{a}{b} = \frac{a}{\beta}$ (11 §.). Es folgt auf eben die Art, daß $\frac{a \times \beta}{a \times \beta} = \frac{a \times b}{a \times \beta}$ (44 §.) also $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ sey (64 §.).

II. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{a}{\beta}$ ist, so wird $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{a \times b}{\beta \times b}$ (64 §.) also $a \times \beta = a \times b$ (32 §.). Wenn nun $b > \beta$, also $\beta < b$ ist, so giebt das $a > \alpha$. (47 §.) Wäre aber $b = \beta$, so müste $a = \alpha$ senn. (44 §.)

88 §.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern durch grössere Zahlen ausgedrückten Bruch $\frac{A}{B}$ gleich ist, alsdenn aber der grössere Zähler mit dem kleinern, und der grössere Nenner mit dem kleinern Nenner dividirt wird; so sind die Quotienten gleich grosse Zahlen. Wofern überdem der Bruch $\frac{a}{b}$ nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann; so sind diese Quotienten gleich grosse ganze Zahlen.

Beweis I. Weil $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ seyn soll, so folgt aus dem II. Satz des 87 §., daß $A \times b = a \times B$ sey: also wird nach dem ersten Satz auch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$.

II. Wären nun a und b die kleinsten Zahlen, wodurch sich der Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken läßt, die Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ aber keine ganze Zahlen; so müste A mit a dividirt einen Rest R, und B mit b dividirt einen Rest r lassen. Wenn demnach Q und q die Quotienten sind, so weit sie in ganzen Zahlen gefunden werden; so hat man $\frac{A}{a} = Q + \frac{R}{a}$ und

$\frac{B}{b}$

$\frac{B}{b} = q + \frac{r}{b}$. Es ist aber $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ vermö-

ge des ersten Satzes: also muß $Q + \frac{K}{a} = q + \frac{r}{b}$ seyn. Nun ist entweder $Q = q$ oder Q in $= q$.

Im ersten Fall wäre also $\frac{R}{a} = \frac{r}{b}$, mithin $\frac{R}{r} = \frac{a}{b}$, und der Bruch $\frac{a}{b}$ liesse sich noch durch kleinere Zahlen ausdrücken, wider die Voraussetzung. Im andern Fall sey $Q = q + d$, so erhält man $d + \frac{K}{a} = \frac{r}{b}$, welches nicht seyn kann, weil $\frac{R}{a}$, $\frac{r}{b}$ ächte Brüche sind, und q eine ganze Zahl also wenigstens $= 1$ seyn müste.

89 §.

Wenn die Zahlen, wodurch ein Bruch $\frac{a}{b}$ ausgedrückt ist, Primzahlen unter sich sind; so läßt er sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken.

Beweis. Wenn a und b noch nicht die kleinsten Zahlen sind, die den Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken können; so nehme man α und β für diese kleinsten Zahlen an, und setze $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Aber nun wird $\frac{a}{\alpha} =$ einer

ganzen Zahl $n = \frac{b}{\beta}$ seyn (88 §.); also wäre $a = n\alpha$ und $b = n\beta$. Demnach hätten a und b noch ein gemeinschaftliches Maaß n, und wären keine Primzahlen unter sich, welches der Voraussetzung entgegen ist.

90 §.

Einen Bruch, ohne seine Grösse zu ändern, durch seine kleinsten Zahlen auszudrücken.

Aufl. Man suche das gröste gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners, und dividire beyde mit demselben: so werden die Quotienten die kleinsten Zahlen seyn, wodurch sich der Bruch ausdrücken läßt (64. 86. 89. §.).

91 §.

Zwey Brüche, die ungleiche Zähler und ungleiche Nenner haben, können nicht gleich groß seyn, wenn Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche unter sich Primzahlen sind.

Beweis. Derjenige von diesen beyden gleichen Brüchen, der den grössern Nenner hätte, müßte auch den grössern Zähler haben: (87. §.) also wäre er noch nicht durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt, und sein Zähler und Nenner könnten nicht unter sich Primzahlen seyn. (89 §.)

92 §.

Wenn die Factoren des Products $a \times b$ Primzahlen sind: so läßt sich eben das Product nicht durch zwo oder noch mehr andre Primzahlen ausdrücken.

Beweis.

Beweis. Wenn α und β ein Paar andre Primzahlen sind, und $a \times b = \alpha \times \beta$ seyn soll: so ist auch $\frac{a}{\beta} = \frac{\alpha}{b}$ (87 §.). Weil aber alle vier Zahlen absolute Primzahlen seyn sollen, so sind a und β, so wie α und b auch unter sich Primzahlen: mithin streitet dieses mit dem 91. §.

Wollte man annehmen, daß $a \times b = \alpha \times B$, und B ein Product mehrerer Primzahlen β, γ, δ, sey: so folgt eben so, wie vorhin, daß $\frac{a}{B} = \frac{\alpha}{b}$ seyn müsse. Alsdenn sind wenigstens α und b unter sich Primzahlen: mithin müßte b in B und α in a aufgehen, (89. 88 §.) welches nicht seyn kann, weil α und a absolute Primzahlen sind.

93 §.

Ein Product $a \times b$ zwoer Primzahlen läßt sich durch keine dritte, die von den beyden Factoren unterschieden ist, ohne Rest dividiren. Denn wäre $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl n: so wäre $a \times b = \alpha \times n$, so gegen den 91. und 92 §. streitet. Ist demnach $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl; so ist entweder $\alpha = a$ oder $\alpha = b$.

94 §.

Ein Product, das aus mehr als zwoen Primzahlen zusammengesetzt ist, kann ebenfalls nicht aus einer gleichen, oder grössern Anzahl von den vorigen unterschiedener Primzahlen zusammen gesetzt werden.

Beweis. Es sey $a \times b \times c = \alpha \times \beta \times \gamma$: so ist $\frac{a \times b}{\beta \times \gamma} = \frac{\alpha}{c}$ (87 §.) Nun muß nothwendig $a \times b \rhd \alpha$, und also $\beta \times \gamma \rhd c$ seyn (89 §.). Demnach ist $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl (88 §.). Folglich entweder $a = \alpha$ (93 §.), und so ist $b \times c = \beta \times \gamma$, also auch $b = \beta$, $c = \gamma$: (92 §.) oder $\alpha = b$, und so ist $a \times c = \beta \times \gamma$, also $a = \beta$, $c = \gamma$ (92 §.)

Wenn gleich γ kein einfacher Factor wäre; sondern statt desselben Anfangs ein zusammengesetzter Factor C wäre angenommen worden; so würde doch diese Voraussetzung nicht bestehen können, sondern wie im 92 §. $C = c$ seyn müssen.

Auf ähnliche Art erhellet, wenn der Satz für eine gewisse Anzahl von Factoren gilt, daß er noch wahr seyn müsse, wenn ein Factor mehr vorhanden ist. Es sey nämlich $a\,b\,c\,-\,-\,f\,g = \alpha\,\beta\,\gamma\,-\,-\,\zeta\,\eta$ und die Anzahl der Factoren in diesen Producten sey $= n + 1$: so muß $\frac{abc\,-\,-\,f}{\beta\gamma\,-\,-\,\zeta\eta} = \frac{\alpha}{g}$ seyn. Nun darf man nicht voraussetzen, daß $\alpha \rhd abc\,-\,-\,f$ sey (89 §.): also muß $abc\,-\,-\,f \rhd \alpha$ und $\frac{abc\,-\,-\,f}{\alpha}$ eine ganze Zahl seyn (88 §.). Diese Zahl sey N, so würde folgen, daß $a\,b\,c\,-\,-\,f = \alpha\,\mathrm{N}$ sey: das streitet aber mit der Voraussetzung, wenn angenommen wird, daß der Satz wahr sey, wenn die Anzahl der Factoren $= n$ ist. Weil nun der Satz für zweene Factoren richtig ist: so gilt er auch für drey, wie auch besonders

sonders erwiesen ist, folglich auch für vier, also für fünf, u. s. f. für jede Anzahl derselben.

95 §.

Es ist demnach auch der Satz des 93 §. allgemein richtig: ein Product aus einer gewissen Anzahl einfacher Factoren, läßt sich durch keine von diesen Factoren verschiedene einfache Zahl ohne Rest dividiren. Wenn der Quotient eine ganze Zahl seyn soll; so muß der einfache Divisor nothwendig mit einem der Factoren des Products einerley seyn. Eben so wenig kann der Quotient $\frac{a.\,b.\,c.\,d.}{\alpha.\,\beta.}$ eine ganze Zahl seyn, wenn die einfachen Factoren des Divisors von den Factoren des Dividendi unterschieden sind. Wäre $\frac{a.\,b.\,c.\,d.}{\alpha.\,\beta.} = N$, und N eine ganze Zahl: so wäre auch $a.\,b.\,c.\,d = \alpha.\,\beta.\,N$, also liesse sich $a.\,b.\,c.\,d.$ sowohl durch α, als durch β ohne Rest theilen, so dem erwiesenen zuwider ist.

96 §.

Jede Zahl, wofern sie keine Primzahl ist, läßt sich in zweene oder mehr Factoren zerfällen. So lange noch einer oder der andre davon keine Primzahl ist, kann er aufs neue in zweene oder mehr Factoren zerfället werden, bis man auf solche Factoren kommt, die insgesammt Primzahlen sind. Die Anzahl dieser einfachen Factoren muß um deßwillen für jede Zahl bestimmt seyn, weil keiner von diesen Factoren kleiner als 2 seyn kann, und weil die Zahl selbst ihre bestimmte Grösse hat. Dieserwegen können zwo Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, wenn kein einfacher Factor der einen mit einem Fa-

ctor der andern einerley ist. Dafern sie aber einige gemeinschaftliche einfache Factoren haben: so ist ihr größtes gemeinschaftliches Maaß das Product dieser gemeinschaftlichen Factoren. Dies gilt nun auch von mehr, als zwoen Zahlen: diese sind allemahl unter sich Primzahlen, wofern sie keinen einfachen Factor mit einander gemein haben. Wenn aber einer, oder mehr einfache Factoren, diesen Zahlen gemein sind: so ist der gemeinschaftliche Factor, oder das Product derselben, wenn mehr vorhanden sind, das größte gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen.

97 §.

Es sind mehr, als zwo Zahlen *A*, *B*, *C*, *D*, gegeben, man soll ihr größtes gemeinschaftliches Maaß suchen.

Aufl. I. Man ordne diese Zahlen nach ihrer Größe, und suche zuerst das größte Maaß M, welches die Zahlen A und B gemein haben, wenn diese kleiner, als die übrigen sind. Wenn alsdenn C die nächstgrössere Zahl, und $A = M \cdot a$, $B = M \cdot b$ gefunden ist; so muß das größte Maaß, was A, B, und C gemein haben, eine Zahl seyn, die in M aufgeht. Diesemnach suche man das größte Maaß der Zahlen M und C. Wenn *m* dieses Maaß und $C = m \cdot c$ ist; so ist *m* das größte Maaß für alle drey Zahlen A, B, C. Wofern überdem auch D mit A, B, C ein gemeines Maaß hat: so muß es entweder die Zahl *m* selbst, oder wenigstens eine solche Zahl seyn, die auch in *m* aufgeht. Also suche man wiederum das größte gemeine Maaß der Zahlen *m* und D: so ist dies zugleich das größte gemeine Maaß von A, B, C und D. Man sieht leicht, daß dies Verfahren

ren sich allemahl anbringen lasse, es mögen so viele Zahlen, als man will, gegeben seyn.

II. Wenn die gegebenen Zahlen so beschaffen sind, daß sie sich leicht in ihre einfache Factoren zerfällen lassen; so ist die Sache am geschwindesten geschehen, wenn man sie durch ihre einfache Factoren ausdrückt. Auf die Art ergeben sich die einfachen Factoren von selbst, die sie mit einander gemein haben, und deren Product das größte gesuchte Maaß abgiebt. So sieht man z. E. leicht, daß die Zahlen 63, 42, 84, sich so ausdrücken lassen, $7 \times 3 \times 3$, $2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3 \times 7 \times 2$: also ist $3 \times 7 = 21$, ihr größtes gemeines Maaß.

98 §.

Aus den bisheriger Lehren liesse sich eine Menge nützlicher Folgen herleiten, und es könnte damit leicht eine ziemlich weitläuftige Beschreibung vieler merkwürdiger Eigenschaften der Zahlen verbunden werden, die sich aus dem Gesetz, nach welchem man die Ziffern zusammen setzt (15 §.), ohne Schwierigkeit ergeben.

Zum Theil gründen sich darauf allerhand practische Vortheile, der man sich bedienen kann, wenn man die gemeinen Maaße zwoer, oder auch mehrer Zahlen sucht, ja selbst allerhand Vortheile, bey den vier Rechnungsarten, das gesuchte Resultat durch kürzere Wege, als nach den theoretischen Regeln zu finden, auch die oben im 69 §. erwehnten Proben zu machen. Nach der Einrichtung dieses Lehrbuches bleiben noch einige dahin gehörige Lehren dem zweyten Theil vorbehalten. Uebrigens vergleiche man auch H. v. Clausbergs demonstrativische Rechenkunst im zweyten Theil, und H. v. Segs-

ners Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie 65-69 §.

Der VI. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

99 §.

Es sind zweene oder auch mehrere Brüche gegeben, deren Nenner verschieden sind; man soll diese Brüche so verändern, daß sie alle gleiche Nenner bekommen, ohne die Grösse der Brüche selbst zu ändern, oder wie man in der Rechenkunst zu reden gewohnt ist: man soll alle auf einerley Benennung bringen.

Aufl. Dieser Aufgabe kann auf mancherley Art ein Genüge geschehen, und es kommt nur darauf an, daß man eine Zahl suche, die sich durch jeden der gegebenen Nenner ohne Rest dividiren läßt. Hätte man die beyden Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{8}$: so läßt sich die Zahl 72 sowohl durch 12, als durch 8 theilen. Wenn man nun mit dem Quotienten, welchen die Division der Zahl 72 mit einem jeden der beyden Nenner giebt, auch den zu diesem Nenner gehörigen Zähler multiplicirt: so erhält man statt der vorigen zweene andre ihnen gleiche Brüche, die beyde den Nenner 72 haben. Man findet nemlich $72 : 12 = 6$ und $72 : 8 = 9$; ferner $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 6}{12 \times 6} = \frac{42}{72}$,

und

und $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9}$ $\frac{45}{72}$ (64 §.). Aber man hätte auch eine kleinere Zahl für den gemeinen Nenner erwehlen, und eben das erhalten können. Es ist in der Ausübung allemahl am bequemsten, die Brüche durch so kleine Zahlen auszudrücken, als die übrigen Umstände zulassen. Deswegen sucht man auch hier kleine Zahlen für die Brüche zu erhalten, als bey gleichen Nennern angehet.

Ohne Zweifel ist in jedem Fall das Product aller Nenner in einander eine solche Zahl, die durch jeden Nenner theilbar ist, wie im vorigen Fall die Zahl $12 \times 8 = 96$ seyn würde: daß aber oft eine kleinere Zahl eben die Eigenschaft habe, beweist schon das vorige Exempel. Deßwegen kommt es nur darauf an, die Umstände zu kennen, unter welchen eine kleinere Zahl zu erhalten ist, und diese Zahl so klein zu nehmen, als es diese Umstände verstatten. Wollte man diesen Vortheil nicht in Betrachtung ziehen, welchen man bey kleinern Zahlen erhält; so könnte man in allen Fällen bey zweenen Brüchen das Product beyder Nenner in einander für den gemeinen Nenner behalten, mithin eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern multipliciren. Nach dieser Regel erhält man $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96}$ und $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$, wo beyde neue Brüche den Nenner 96 haben.

Wenn aber die beyden Nenner ein gemeines Maaß haben; so kann man allemahl mit einem kleinern Nenner eben das erhalten. Man nehme an,

daß $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ die gegebenen Brüche sind, und daß die Nenner das gröste gemeine Maaß *m* haben: so erhellet, daß in dem Product beyder Nenner die Zahl *m* zweymahl als ein Factor vorkommen müsse. Es wird nemlich $B = mP$ und $D = mQ$, wenn P und Q die Quotienten $B : m$ und $D : m$ bedeuten. Also hat man $B \times D = m\,P.m.Q$. Läßt man aus diesem Product den Factor *m* einmahl weg: so behält das Product *m*. P. Q dennoch die Eigenschaft, daß es durch $B = mP$ sowohl, als auch durch $D = mQ$ theilbar ist. Eben dies Product ist auch die kleinste Zahl, welche diese Eigenschaft haben kann, weil die zu dieser Absicht brauchbare Zahl alle Factoren eines jeden der Special-Nenner enthalten muß. Hierauf gründet sich nun folgende Regel, bey zweenen Brüchen den kleinsten gemeinen Nenner zu finden.

Man schreibe die Nenner, nachdem man ihr grösstes gemeines Maaß nach dem 85 §. gesucht hat, bey einander hin, dividire sie mit dem gefundenen Maaß, und schreibe die Quotienten darunter: so wird das Product des gebrauchten Maaßes, und der beyden Quotienten in einander, der gesuchte kleinste gemeine Nenner seyn.

Wenn man die neuen Brüche selbst sucht: so ist es am bequemsten, die Rechnung so zu führen. Man schreibt die Brüche untereinander, und macht zur Seite zwo Columnen. Oben über der ersten setzt man den gefundenen gemeinen Nenner, dividirt ihn mit dem Specialnenner eines jeden Bruchs, und setzt den Quotienten in eben dieser Columne ei-

nem jeden Bruch zur Seite. Ferner multiplicirt man den Zähler eines jeden Bruchs mit dem so gefundenen Quotienten, und setzt die Producte in der zweyten Columne jedem Bruch gegen über: so sind das die neuen Zähler. Auf die Art sind folgende Exempel berechnet.

gegebene Nenner 12 8
gemeines Maaß 4)
Quot. 3 2
gemeiner Nenner = 4 × 3 × 2 = 24

	(24)	
$\frac{7}{12}$	2	14
$\frac{5}{8}$	3	15

* * *

gegeb. Nenner 8 4
gemein. Maaß 4)
Quot. 2 1
gemein. Nenner = 4 × 2 = 8

	(8)	
$\frac{5}{8}$	1	5
$\frac{3}{4}$	2	6

* * *

gegeb. Nenner 12 9
gemein. Maaß 3)
Quot. 4 3
gemein. Nenner = 3 × 4 × 3 36.

	(36)	
$\frac{5}{12}$	3	15
$\frac{2}{9}$	4	8

Man siehet hieraus leicht, daß man das Product beyder Nenner zum gemeinen Nenner behalten müsse, wenn diese Nenner Primzahlen unter sich sind.

Es

Es ist nun nicht schwer, die Anwendung hievon auch auf die Fälle zu machen, wenn mehr als zweene Brüche auf einerley Benennung gebracht werden sollen. Man hat wiederum eine Zahl zu suchen, die durch jeden gegebenen Nenner theilbar ist. Wenn diese gefunden ist, so kann man sie zum gemeinen Nenner annehmen, und mit jedem Bruch wie vorhin umgehen. Ohne Zweifel ist das Product aller Nenner in einander so beschaffen: aber oft hat eine kleinere Zahl eben die Eigenschaft, und dies allemahl, wenn alle Nenner, oder wenigstens einige ein gemeines Maaß haben. Wenn $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ die gegebenen Brüche sind; so setze man m sey der Nenner, B, D, F grösstes gemeines Maaß. Es sey $B:m = P$, $D:m = Q$, $F:m = R$, folglich $B = mP$, $D = mQ$, $F = mR$; so fällt in die Augen, daß m in dem Product aller Nenner so vielmahl, als ein Factor vorkommen werde, als Nenner da sind, im gegenwärtigen Fall dreymahl. Es ist nemlich B. D. F $= m.P.m.Q.m.R$. Aber es kann der Factor m zweymahl wegbleiben: wenn er nur einmahl da ist; so wird doch das Product $m.P.Q.R$ noch durch $B = mP$, durch $D = mQ$, durch $F = mR$ theilbar seyn. Nochmehr: alle drey Quotienten P, Q, R werden nun zwar kein gemeines Maaß mehr haben können, weil m der Nenner grösstes Maaß ist: aber ihrer zwene allein, z. E. P und Q könnten noch wohl ein gemeines Maaß μ haben. Es sey also $P = \mu.p$, und $Q = \mu.q$: so ist $B = m.\mu.p$, $D = m.\mu.q$, $F = mR$, und das Product $m.P.Q.R = m.\mu.p.\mu.q.R$. Aus diesem Product kann auch μ einmahl wegbleiben, und es bleibt noch durch $B = m.\mu.p$, durch $D = m.\mu.q$,

durch

durch F = *m*R theilbar. Also kann man das Product *m*. *μ*. *p*. *q*. R für den gemeinen Nenner nehmen, welches sich nun auch nicht kleiner machen läßt. Hätten B, D, F, kein gemeines Maaß, wohl aber B und D, so daß B = *m*P, D = *m*Q wäre; so erhellet, daß aus dem Product B. D. F = *m*. P. *m*. Q. R der Factor *m* auch jetzt noch einmahl wegbleiben könne, und daß *m*. P. Q. R der kleinste gemeine Nenner sey, den man nehmen kann.

Diese Betrachtungen, welche hier der Kürze wegen nur auf drey Nenner angewandt sind, lassen sich sehr leicht auf so viele Nenner, als man will, anwenden, und man kann daraus folgende Regeln ziehen, in jedem Fall den kleinsten General-Nenner zu finden.

I. Man schreibe die Nenner alle nach einander hin. Haben sie alle ein gemeines Maaß: so dividire man sie damit, und setze die Quotienten darunter. Dafern sie nicht alle ein gemeines Maaß haben; so dividire man mit dem Maaße, so die meisten gemein haben, setze die Quotienten, und zugleich die Zahlen, welche nicht haben dividirt werden können, ungeändert wieder bey einander hin.

II. Mit diesen Quotienten, und ungeänderten Zahlen gehe man wie vorhin um. Man dividire mit dem Maaße, welches die meisten gemein haben, und lasse die Zahlen ungeändert, die sich damit nicht theilen lassen. Die solcher Gestalt gebrauchten Maaße werden jederzeit bey der Seite bemerket.

III. Wenn man nun auf solche Zahlen gekommen ist, worunter keine weiter ein gemeines Maaß haben: so multiplicire man alle zuletzt herausgebrachte Zahlen, und alle gebrauchte Maaße in einander. Das

Pro-

Product wird der gesuchte keinste General-Nenner seyn, und folgende Exempel werden diese Regeln erläutern:

63 42 84 — 252

21)

3 2 4

2)

3 1 2

gem. Nenner $21 \times 2 \times 3 \times 2 = 252$.

$\frac{1}{6}\frac{3}{3}$ | 4 | 52

$\frac{9}{4}\frac{}{2}$ | 6 | 54

$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$ | 3 | 33

* * * * * — 360

8 12 6 9 5

3)

8 4 2 3 5

2)

4 2 1 3 5

2)

2 1 1 3 5

$\frac{3}{8}$ | 45 | 135

$\frac{7}{1}\frac{}{2}$ | 30 | 210

$\frac{5}{6}$ | 60 | 300

$\frac{2}{9}$ | 40 | 80

$\frac{4}{5}$ | 72 | 288

gem. Nenner $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$.

Wenn unter den Nennern gar keine vorhanden sind, die ein gemeines Maaß haben; so muß man das Product aller Nenner selbst für den gemeinen Nenner behalten. In diesem Fall also muß eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Product aller übrigen Nenner multiplicirt werden, welches die gemeine Regel ist.

Man

Man sehe von dieser Aufgabe von Clausbergs demonstrativische Rechenkunst 655-662 §.

100 §.

Es sind zweene, oder mehr Brüche gegeben, man soll alle zusammen addiren.

Aufl. Man bringe sie alle auf einerley Benennung, daferne sie nicht schon gleiche Nenner haben; addire darauf alle Zähler, und behalte den gemeinschaftlichen Nenner: so hat man die Summe (57. 48 §.). Giebt dies einen uneigentlichen Bruch; so ist es gemeiniglich am bequemsten, durch die Division des Nenners in den Zähler die darinn enthaltene ganze Zahl zu suchen, und den Bruch durch diese ganze Zahl, nebst dem überdem darinn enthaltenen eigentlichen Bruch auszudrücken. Die eigentlichen Brüche, welche herauskommen, drückt man durch ihre kleinsten Zahlen aus.

Exempel.

252		
$\frac{1}{6}\frac{3}{3}$	4	52
$\frac{9}{4}\frac{}{2}$	6	54
$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	3	33
Sum.		139
		252

360		
$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{5}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288
Sum.		1013
		360
oder		$2\frac{2}{3}\frac{9}{6}\frac{3}{0}$

210		
$\frac{2}{3}$	70	140
$\frac{4}{5}$	42	168
$\frac{6}{7}$	30	180
$\frac{1}{2}$	105	105
Sum.		593
		210
oder		$2\frac{1}{2}\frac{7}{1}\frac{3}{0}$

101 §.

Ein eigentlicher Bruch wird zu einer ganzen Zahl selten anders addirt, als dadurch, daß man ihn an der ganzen Zahl unmittelbar anhängt. Will man inzwischen den uneigentlichen Bruch haben, der eine ganze Zahl nebst einem Bruch enthält, der letzte mag nun ein eigentlicher, oder uneigentlicher Bruch seyn; so kann man die ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner 1 ist: da sich dann dieser Bruch mit dem andern auf einerley Benennung bringen läßt, und die Summe nach dem vorig. §. gesucht werden kann. So wird $3 + \frac{5}{8} = \frac{24}{8} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

102 §.

Einen kleinern Bruch vom grössern zu subtrahiren.

Aufl. Ohne Zweifel ist derjenige Bruch kleiner, als der andre, der den kleinern Zähler hat, wenn die Nenner gleich sind: denn der erste enthält weniger Theile der Einheit von eben der Art, als der letzte. Nachdem man also beyde, wofern sie nicht schon gleiche Nenner hatten, auf einerley Benennung gebracht hat; subtrahire man den kleinern Zähler vom grössern, nehme diese Differenz zum Zähler des gesuchten Bruchs, und behalte den gemeinschaftlichen Nenner. Der neue so gefundene Bruch ist die gesuchte Differenz, (57. 49 §.) den man hiernächst vielleicht noch auf kleinere Zahlen bringen kann.

Exempel.

	24			36			12	
$\frac{5}{8}$	3	15	$\frac{5}{12}$	3	15	$\frac{11}{12}$	1	11
$\frac{7}{12}$	2	14	$\frac{2}{9}$	4	8	$\frac{2}{3}$	4	8
Rest	$\frac{1}{24}$		Rest	$\frac{7}{36}$		Rest	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	

103 §.

Wenn man einen Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiren soll: so siehet man die ganze Zahl wiederum als einen Bruch an, dessen Nenner 1 ist, und verfährt wie vorhin. Z. E. $7-\frac{8}{5}=\frac{35}{5}-\frac{8}{5}=\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$. Ist es ein eigentlicher Bruch, den man subtrahiren soll; so weiß man, daß derselbe allemahl kleiner, als 1 sey. Man darf demnach von der ganzen Zahl nur 1 abrechnen, den Bruch von 1 subtrahiren, und den Ueberschuß zu der um 1 verminderten ganzen Zahl wieder addiren. Z. E. $5-\frac{7}{9}=4+\frac{9}{9}-\frac{7}{9}=4+\frac{2}{9}=4\frac{2}{9}$.

104 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man muß den Bruch so vielmahl zu sich selbst addiren, als die ganze Zahl Eins enthält (30 §.). Also darf man nur den Zähler so vielmahl addiren, und den Nenner behalten (100 §.). Aber das ist eben so viel, als wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt (30 §.). Folglich ergiebt sich die Regel:

Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner un-

Bayerische Staatsbibliothek München

ungeändert: so ist der neue Bruch, das gesuchte Product.

z. E. $\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$
$\frac{7}{9} \times 3 = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}$

Eine andre Auflösung.

Eben dies Product kann man auch noch auf eine andre Art erhalten. Denn man betrachte zuerst einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, z. E. $\frac{1}{16}$: so fällt in die Augen, daß man einen Bruch erhalte, der doppelt so groß, als der vorige ist, wenn man den Nenner halbirt, und $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{16}$ nimmt. Eben der Bruch wird viermahl grösser, wenn man den Nenner viermahl kleiner macht, und $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{16}$ nimmt. Es fällt eben so leicht in die Augen, daß $\frac{1}{2}$ achtmahl grösser, als $\frac{1}{16}$ sey. Ein Bruch von dieser Art wird also mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner durch die ganze Zahl dividirt, ohne den Zähler zu ändern. Wenn man nun dabey in Betrachtung ziehet, daß jeder Bruch, dessen Zähler > 1 ist, die Summe so vieler Brüche von jener Art sey, als der Zähler 1 enthält; so folgt daraus, daß diese Art, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, sich allgemein auf alle Brüche erstrecke. Denn es ist z. E. $\frac{3}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$. Also $\frac{3}{16} \times 4 = (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) \times 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (48 §.) $= \frac{3}{4}$. Dies giebt die Regel.

Das Product eines Bruchs durch eine ganze Zahl wird auch gefunden, wenn man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl dividirt, und den Zähler nicht ändert.

Es ist übrigens diese Regel eine Folge der ersten. Wenn nämlich nach der ersten Regel $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3 \times 4}{16}$, so ist nach dem 64 §. auch $\frac{3 \times 4}{16} = \frac{3 \times 4 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{16 : 4}$, also $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{16 : 4}$. Man sieht leicht, daß dies alles nicht auf die bestimmte Grösse der zu Beyspielen gebrauchten Brüche eingeschränkt sey, sondern allemahl seine Richtigkeit habe, was auch für Brüche vorkommen.

Weil man allemahl gerne einen Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausdrückt; so ist es vortheilhafter, einen Bruch mit einer ganzen Zahl nach der letzten Regel zu multipliciren, als wenn man es nach der ersten bewerkstelliget, dafern nur der Nenner des Bruchs sich durch die ganze Zahl ohne Rest dividiren läßt. Widrigenfalls würde im Nenner des Products ebenfalls ein Bruch kommen, und das Product ein gebrochener Bruch werden (64 §.). Ob nun gleiche Brüche von dieser Art, wenn sie nach der letzten Regel herauskommen, die Aufgabe eben so gut auflösen, wie die regulären Brüche, welche die erste Regel giebt; so vermeidet man sie doch gern in der Ausübung, weil der eigentliche Werth dieser Brüche nicht so unmittelbar in die Augen fällt, wie bey jenen regulären Brüchen.

105 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. Von zweenen Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist ohne Zweifel der erste Bruch halb so groß, als der zweyte, wenn sein Zähler halb so groß

ist, als der Zähler der letzten, und dies nicht allein: der erste wird der dritte, vierte, fünfte Theil, u. s. w. des zweyten seyn, wenn sein Zähler der dritte, vierte, fünfte Theil, u. s. f. von dem Zähler des zweyten ist, oder, welches einerley ist, wenn sein Zähler der Quotient ist, den man durch die Division des grössern Zählers mit den Zahlen 3. 4. 5. u. s. f. findet (42 §.). Dies folgt aus dem 100 §., und giebt die Regel:

Man dividire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert: so wird der neue Bruch der gesuchte Quotient seyn.

So erhält man $\frac{12}{17} : 3 = \frac{4}{17}$; $\frac{9}{8} : 3 = \frac{3}{8}$; $\frac{7}{4} : 3 = \frac{2\frac{1}{3}}{4}$. Das letzte Exempel ergiebt, daß man nach dieser Regel wiederum einen irregulären Bruch finde, wenn der Zähler durch die ganze Zahl nicht theilbar ist. Aber man kann den Quotienten auch auf eine andre Art erhalten, bey welcher nie irreguläre Brüche vorkommen.

Eine andere Auflösung.

Wenn nämlich der Zähler des Bruchs 1 ist, und man nimmt seinen Nenner doppelt so groß, als vorher: so ist der Bruch die Hälfte des vorigen. So ist z. E. $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 2$; $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} : 2$. Man sieht leicht, daß aus dem Bruch der dritte Theil des vorigen werde, wenn man den Nenner mit 3 multiplicirt. Es ist z. E. $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} : 3$,

$\frac{1}{4 \times 3}$

$\frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} : 3$. Man erhält auf die Art allemahl denjenigen aliquoten Theil des Bruchs, den die ganze Zahl anzeigt, und der Bruch wird auf solche Art mit der ganzen Zahl dividirt. Aber hieraus folgt die allgemeine Regel:

Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert: so ist der neue Bruch der gesuchte Quotient.

Denn jeder Bruch ist die Summe so vieler Brüche von eben dem Nenner, mit dem Zähler 1, als in jedem Zähler 1 enthalten ist. So ist $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, also $\frac{3}{8} : 2 = (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$ (48. 100 §.) $= \frac{3}{16}$.

Eben diese Regel ist auch eine Folge der vorigen, vermöge welcher $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3:2}{8}$. Aber $\frac{3:2}{8} = \frac{3:2 \times 2}{8 \times 2}$ (64 §.) $= \frac{3}{8 \times 2}$, also auch $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$. Eben so wird $\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{12}$, $\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{36}$, $\frac{9}{15} : 8 = \frac{9}{120}$.

106 §.

Eine Grösse mit einem Bruche multipliciren heißt den aliquoten Theil dieser Grösse, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, so vielmahl nehmen, als der Zähler des Bruchs Eins enthält. Vermöge des Sprachgebrauchs sind nämlich folgende Redensarten einerley. Eine Grösse $\frac{1}{2}$ mahl nehmen, oder

sie durch 2 theilen, ihre Hälfte nehmen: eine Grösse $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, oder sie durch 3 theilen, u. s. f. Weil nun bey ganzen Zahlen die Redensart: eine Grösse *n* mahl nehmen, so viel heißt, als sie durch die ganze Zahl *n* multipliciren; so nennt man das auch mit dem Bruch $\frac{1}{n}$ multipliciren, wenn man die Grösse $\frac{1}{n}$ mahl nehmen, oder eigentlich sie mit der ganzen Zahl *n* theilen soll. Eben so bedeutet die Redensart: eine Grösse $\frac{2}{3}$ mahl nehmen, eigentlich dies: man soll einen Drittheil derselben 2 mahl nehmen. Wenn also $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, eigentlich durch 3 theilen heißt; so ist $\frac{2}{3}$ mahl nehmen so viel, als durch 3 theilen, und was heraus kommt, mit 2 multipliciren. Eine Grösse $\frac{5}{8}$ mahl nehmen, heißt sie durch 8 theilen, und was heraus kommt, mit 5 multipliciren. Wenn also obgedachte Redensarten in dem festgesetzten Sinn genommen werden, so kann man sagen: Eine Grösse mit einem Bruch multipliciren heisse sie so viel mahl nehmen, als der Bruch ausdrückt: So hieß auch eine Grösse mit einer ganzen Zahl multipliciren, sie so viel mahl nehmen, als die ganze Zahl ausdrückt. Bey der Multiplication mit einer ganzen Zahl ist 1 im Multiplicator so vielmahl enthalten, als das Multiplicandum im Product, und das Product ist eben so viel mahl grösser, als das Multiplicandum. Bey der Multiplication mit einem Bruch ist der aliquote Theil der Einheit, welchen des Multiplicators Nenner anzeigt, im Multiplicator so vielmahl enthalten, als ein ähnlicher aliquoter Theil des Multiplicandi

im

im Product enthalten ist. Wenn also der Multiplicator ein eigentlicher Bruch ist, so ist das Product kleiner, als das Multiplicandum. Die Bezeichnung bleibt eben so, wie im 31 §.

107 §.

Wenn die vorhin erwehnten Redensarten in dem jetzt fest gesetzten Sinn genommen werden; so lassen sich verschiedene Sätze, die oben für ganze Zahlen erwiesen sind, auch für die Brüche erweitern.

War der Quotient zwoer ganzen Zahlen in einander, eine ganze Zahl: so drückte er aus, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey (52 §). Nun kann man eben so reden, wenn gleich der Quotient ein ächter Bruch, oder auch ein unächter Bruch ist, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen läßt. So kann man z. E. sagen: 4 sey $\frac{3}{4}$ mahl in 3, und 5 sey $2\frac{2}{5}$ mahl in 12 enthalten, das heißt: 3 enthält den vierten Theil von 4 drey mahl; 5 ist zweymahl ganz, und überdem noch der fünfte Theil davon zweymahl in 12 enthalten.

War der Multiplicator eine ganze Zahl, so drückte er aus, wie vielmahl das Multiplicandum im Product enthalten sey. Man kann nun eben so reden, wenn der Multiplicator ein Bruch ist, z. E. 6 ist $\frac{2}{3}$ mahl in dem Product $6 \times \frac{2}{3}$ enthalten, das heißt: der dritte Theil von 6 ist darinnen zweymahl enthalten.

108.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Zähler, und dividire das Product durch den Nenner: so ist das gesuchte Product gefunden. z. E. $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$, $4 \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$.

Beweis. Man muß die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs dividiren, und den so gefundenen Quotienten mit dem Zähler multipliciren. (106 §.) Das Resultat bleibt aber einerley, wenn auch in umgekehrter Ordnung die ganze Zahl zuerst mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, und das so gefundene Product mit dem Nenner dividirt wird. Denn es ist $A \times \frac{n}{m} = \frac{A}{m} \times n = \frac{A \times n}{m}$. (104 §.

109 §.

Eine ganze Zahl und ein Bruch geben einerley Product, man mag jene mit diesem, oder diesen mit jener multipliciren.

Beweis. Es ist $4 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3}$ (108 §.) $= \frac{2 \times 4}{3}$, (33 §.) und $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3}$ (104 §.) Also $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4$ (11 §.).
Der Beweis ist an die Grösse der gebrauchten Zahlen nicht gebunden, also allgemein.

110 §.

Gleiche Grössen mit gleichen Brüchen multiplicirt geben gleiche Producte.

Bey gleichen Multiplicandis giebt der grössere Bruch ein grösseres Product, als der kleinere.

Das grössere Multiplicandum mit einem grössern Bruch multiplicirt, giebt ein grösseres Product, als wenn man das kleinere mit dem kleinern Bruch multiplicirt.

Beweis.

Beweis. Wenn die Multiplicatores nicht Brüche von gleicher Benennung sind: so bringe man sie auf gleiche Nenner (99 §.) Nun werden gleiche Multiplicatores auch gleiche Zähler, der grössere aber einen grössern Zähler haben, als der kleinere, und denn folgen obige Sätze aus dem 106. 44. 32. 35. §. §.

111 §.

Wenn die Redensarten: eine Grösse ist in der andern $\frac{1}{2}$ mahl, $\frac{1}{3}$ mahl u. s. f. enthalten, so erklärt werden, wie im 107 §.: so heißt eine Grösse mit einem Bruche dividiren, nichts anders, als eine neue Grösse suchen, die so viel mahl im Dividendo enthalten ist, als der gebrochene Divisor ausdrückt. Die Zahl 4 mit $\frac{1}{2}$ dividiren, heißt also, eine Zahl suchen, die $\frac{1}{2}$ mahl in 4 enthalten ist, das heißt, deren Hälfte 4 ist. Es erhellet leicht, daß dies die Zahl 8 sey. Die Zahl 6 mit $\frac{2}{3}$ dividiren heißt eine Zahl suchen, die $\frac{2}{3}$ mahl in 6 enthalten ist, das heißt: davon der dritte Theil, zweymahl genommen 6 macht. Diese Zahl ist keine andre, als 9. Es wird diese Division eben so bezeichnet, wie im 42 §. gezeigt worden.

112 §.

Eine Grösse mit einem Bruch dividiren heißt dasjenige Vielfache des Dividendi, welches der Nenner des gebrochenen Divisors anzeigt, mit seinem Zähler dividiren.

Beweis. Wenn man die Zahl 10 mit $\frac{2}{3}$ dividiren soll, und man dividirt sie mit 2; so ist der Quotient 5 noch nicht die eigentlich gesuchte Zahl, sondern ihr dritter Theil: denn es soll der 3te Theil der gesuchten Zahl 2 mahl genommen 10 ausma-

chen. Demnach ist die gesuchte Zahl $= \frac{10}{2} \times 3$, mithin eben die Zahl $= \frac{10 \times 3}{2}$ (104 §.)

113 §.

Eine Grösse mit einem Bruch dividiren, ist eben so viel, als diese Zahl mit dem umgekehrten Bruch multipliciren. (112. §.

Die Division mit einem Bruch und die Multiplication mit einem Bruch sind einander so entgegen gesetzt, daß eine dieser Operationen die andre aufhebt. Es ist $A \times \frac{n}{m} : \frac{n}{m} = A \times \frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = A$, und $A : \frac{n}{m} \times \frac{n}{m} = A \times \frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = A$.

114 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu dividiren.

Aufl. I. Man dividire die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit d[illegible] Nenner.

27	9		30	6	
$\frac{3}{4}$)	$\times 4$		$\frac{5}{8}$)	$\times 8$	
Quot.	36		Quot.	48	

II. Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner, und dividire, was herauskommt, mit

mit des Bruchs Zähler: so ist der ebenfalls gesuchte Quotient gefunden.

$$\frac{5}{\frac{3}{7}} \qquad \frac{29}{\frac{5}{8}}$$

35 | 232 |

3) | $11\frac{2}{3}$ 5) | $46\frac{2}{3}$

Die Richtigkeit beyder Regeln erhellet leicht aus dem 112 und 113 §.

115 §.

Gleiche Grössen mit gleichen Brüchen dividirt, geben gleiche Quotienten, und das grössere Dividendum giebt einen grössern Quotienten, als das kleinere bey gleichen Divisoren.

Bey gleichen Dividendis aber giebt der grössere gebrochene Divisor einen kleinern, und der kleinere einen grössern Quotienten.

Beweis. Wenn die Brüche auf gleiche Benennung gebracht sind: so folgt alles leicht aus dem 113 44. 46. 47. 32. 35 §.

116 §.

Einen Bruch mit einem andern Bruch zu multipliciren.

I. Auflösung.

Man nehme das Product beyder Zähler zum Zähler, und das Product beyder Nenner zum Nenner eines neuen Bruchs: so wird derselbe das gesuchte Product seyn. Z. E. $\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$; $\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Beweis. Man muß das Multiplicandum mit dem Nenner des Multiplicators dividiren, und was herauskommt, mit dem Zähler des Multiplicators multi-

multipliciren (106 §.) Also ist $\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = (\frac{7}{8} : 3) \times 2 = \frac{7}{8 \times 3} \times 2$ (105 §. 2 Aufl.) $= \frac{7 \times 2}{8 \times 3}$ (104 §. 1 Aufl.)

II. Auflösung.

Man dividire kreutzweise des Multiplicandi Zähler mit des Multiplicators Nenner, und jenen Nenner, mit diesem Zähler: so ist jener Quotient der Zähler, und dieser der Nenner des gesuchten Products. Z. E. $\frac{15}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{15:3}{16:2} = \frac{5}{8}$; $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4:7}{5:3} = \frac{\frac{4}{7}}{1\frac{2}{3}}$. Diese Regel giebt gebrochne Brüche (64 §.), wenn die Divisionen nicht aufgehen, wie im letzten Exempel. Aber wenn alles aufgehet, ist sie vortheilhafter als die erste, weil man zugleich dadurch solche Brüche zu Producten erhält, die durch ihre kleinsten Zahlen ausgedrückt sind.

Beweis. Es ist $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = (\frac{4}{5} : 7) \times 3$ (106 §.) $= \frac{4:7}{5} \times 3$ (105 §. 1 Aufl.) $= \frac{4:7}{5:3}$ (104 §. 2 Aufl.

III. Auflösung.

Man Multiplicire den Zähler des Multiplicandi mit dem gebrochenen Multiplicator, und lasse den Nenner ungeändert. Z. E. $\frac{8}{11} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{11}$; $\frac{2}{2}\frac{5}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{2}\frac{0}{7}$; $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{12}{7}}{5}$.

Beweis.

Beweis. Es ist $2\frac{5}{7} \times \frac{4}{5} = 2\frac{5}{7} : 5 \times 4$ (106 §.) $= \frac{25:5}{27} \times 4$ (105 §. 1 Aufl.) $= \frac{25:5 \times 4}{27}$ (104 §. 1 Aufl.) $= \frac{25 \times \frac{4}{5}}{27}$. (106 §.)

IV. Auflösung.

Man dividire des Multiplicandi Nenner mit dem gebrochenen Multiplicator, und behalte den Zähler. Z. E. $\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$; $\frac{7}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{18}$.

Beweis. Es ist $\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{9} : 4 \times 3$ (106 §.) $= \frac{5}{9 \times 4} \times 3$ (105 §. 2 Aufl.) $= \frac{5}{9 \times 4 : 3}$ (104 §. 2 Aufl.) $= \frac{5}{9 : \frac{3}{4}}$ (114 §.)

117 §.

Zweene Brüche geben mit veränderter Ordnung der Factoren einerley Product.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$ und $\frac{C}{D} \times \frac{A}{B} = \frac{C \times A}{D \times B}$ (116 §.). Da nun $A \times C = C \times A$, und $B \times D = D \times B$ (33 §.), wenn die Buchstaben ganze Zahlen bedeuten: so ist auch $\frac{A \times C}{B \times D} = \frac{C \times A}{D \times B}$ und $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \times \frac{A}{B}$.

118 §.

Ein Product so vieler Factoren, als man will, es mögen ganze, oder gebrochne Zahlen, oder beyde Arten durch einander seyn, ändert sich also nicht,

wenn

wenn man die Ordnung der Factoren ändert (117. 109. 33 §.).

119 §.

Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

I. Auflösung.

Man multiplicire kreutzweise des Dividendi Zähler mit des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Zähler: so ist jenes Product der Zähler, und dieses der Nenner des gesuchten Bruchs (113. 116 §. 1 Aufl.) z. E. $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2}$ (113 §.) $= \frac{27}{8}$ (116 §.) $= 3\frac{3}{8}$; $\frac{1}{1}\frac{1}{2} : \frac{6}{7} = \frac{7}{7}\frac{7}{2} = 1\frac{5}{7}2$.

II. Auflösung.

Man dividire gradezu des Dividendi Zähler mit dem Zähler des Divisors, und des Dividendi Nenner mit dem Nenner des Divisors: so ist jener Quotient der Zähler und dieser der Nenner des gesuchten Bruchs (113. 116 §. 2 Aufl.) z. E. $\frac{2}{2}\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = \frac{2}{2}\frac{1}{4} \times \frac{8}{3}$ (113 §.) $= \frac{7}{3}$ (116 §. 2 Aufl.); $\frac{5}{9} : \frac{7}{8} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{5}{7}}{1\frac{1}{8}}$.

III. Auflösung.

Man dividire den Zähler des Dividendi mit dem gebrochenen Divisor, und lasse den Nenner ungeändert. (113. 116 §. 3 Aufl.) z. E. $\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4}$ (113 §.) $= \frac{5 \times \frac{9}{4}}{8}$ (116 §. 3 Aufl.) $= \frac{5 : \frac{4}{9}}{8}$ (114 §.): also auch $\frac{1}{1}\frac{2}{7} : \frac{4}{9} = \frac{2}{1}\frac{7}{7}$.

IV. Auflösung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner mit dem gebrochenen Divisor, und lasse den Zähler ungeändert.

dert. (113. 116 §. 4 Aufl.) z. E. $\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4}$ (113 §.) $= \frac{5}{8 : \frac{9}{4}}$ (116 §. 4 Aufl.) $= \frac{5}{8 \times \frac{4}{9}}$

114 §. Eben so findet man $\frac{1}{2}\frac{9}{4} : \frac{5}{8} = \frac{1}{1}\frac{9}{5}$.

120 §.

Wenn das Dividendum eine Zahl, und der Divisor ein Bruch ist, so ist der Quotient eine Zahl, welche angiebt, wie viel mahl der Divisor im Dividendo enthalten sey.

Beweis. Es sey D das Dividendum, und $\frac{n}{m}$ der Divisor, Q der Quotient: so hat man $D : \frac{n}{m} = Q$, also $D = Q \times \frac{n}{m}$ 112 §. Aber $Q \times \frac{n}{m} = \frac{n}{m} \times Q$, es mag Q eine ganze Zahl, oder ein Bruch seyn (109. 117 §.). Also $D = \frac{n}{m} \times Q$ und $D : Q = \frac{n}{m}$ 112 §. Das will sagen: das Dividendum mit dem Quotienten dividirt giebt den Divisor zum Quotienten: also drückt der Quotient Q aus, wie vielmahl der Divisor $\frac{n}{m}$ im Dividendo D enthalten sey (111 §.).

121 §.

Der Satz gilt auch umgekehrt: Eine Zahl, welche ausdrückt, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey, ist der Quotient.

Beweis.

Beweis. Es sey $\frac{n}{m}$ diese Zahl, welcher Ausdruck auch eine ganze Zahl vorstellet, wenn $m = 1$ ist: so hat man $D = d \times \frac{n}{m}$ (106 §). Also auch

$D = \frac{n}{m} \times d$ (109. 117 §) und $D : d = \frac{n}{m}$ (112 §).

122 §.

Man kann also überhaupt sagen, eine Zahl mit einer andern dividiren heisse untersuchen, wie vielmahl die letzte in der ersten enthalten sey (52. 107. 121 §): und aus dieser Erklärung der Division folgen eben die Rechnungsregeln des 119 §. Will man wissen, wie vielmahl ein Bruch $\frac{2}{9}$ in einem andern $\frac{3}{4}$ enthalten sey; so darf man sie nur beyde auf einerley Benennung bringen, und alsdann suchen, wie vielmahl des ersten Zähler in des letzten Zähler enthalten sey. So würde man im gegenwärtigen Fall erhalten $\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4}$ und $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9}$, folglich $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3 \times 9}{2 \times 4}$, welches die erste Regel des 118 §. ist.

123 §.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs mit einem und eben denselben andern Bruch multiplicirt, oder dividirt werden: so ändert dies die Grösse des Bruches nicht.

Beweis. Es ist $\frac{5 \times \frac{2}{3}}{8 \times \frac{2}{3}} = (\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}) : \frac{2}{3}$ (116. 119 §) $= \frac{5}{8}$ (112 §). So ist auch $\frac{5 : \frac{2}{3}}{8 : \frac{2}{3}} = (\frac{5}{8} : \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3}$ (116. 119 §) $= \frac{5}{8}$ (112 §).

Ein

Ein irregulärer, oder gebrochner Bruch von dieser Art $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$, ist mit dem Quotienten $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ einerley, und umgekehrt, der Quotient mit dem Bruch.

Beweis. Denn $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5:8}{3:7}$ (57 §) und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{7 \times 5}{8 \times 3} = \frac{5 \times 7}{3 \times 8}$ (33 §) $= \frac{5}{8} : \frac{8}{7} = \frac{5:8}{3:7}$ (119 §; also $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ (11 §).

124 §.

Aus dem bisherigen ist nun leicht abzunehmen, wie man die Regeln der vier Rechnungsarten anzuwenden habe, wenn unter den gegebenen Zahlen solche vorkommen, die aus ganzen Zahlen mit angehängten Brüchen bestehen. Man kann solche Zahlen nach dem 101 § auf uneigentliche Brüche bringen, und mit ihnen in der Rechnung sodann nach den Regeln der Bruchrechnung umgehen. Aber dies Verfahren ist nicht allemahl das kürzeste.

Beym addiren ist es gemeiniglich am bequemsten, wenn man zuerst die angehängten Brüche summirt, die Summe, dafern ein uneigentlicher Bruch herauskommt, auf die darin enthaltne ganze Zahl bringt, und den übrig bleibenden Bruch unter der Columne der Brüche schreibt, hierauf aber die herausgebrachte ganze Zahl mit zu den ganzen Zahlen summirt.

Exempel.

	$7\frac{7}{8}$					
		8	3	9		
	$5\frac{2}{3}$	3)				
		8	1	3		
	$3\frac{7}{9}$	gem. N. 3. 8. 3. = 72.				
Sum.	$17\frac{2}{7}\frac{3}{2}$					

	72	
$\frac{2}{8}$	9	63
$\frac{2}{3}$	24	48
$\frac{7}{9}$	8	56
Sum.	$\frac{167}{72}$	
oder	$2\frac{2}{7}\frac{3}{2}$.	

Auch beym Subtrahiren kann man zuerst die Rechnung mit den angehängten Brüchen vornehmen, und sodann zu den ganzen Zahlen fortgehen. Wenn hier die Zahl, welche man subtrahiren muß, einen grössern Bruch bey sich hat, als die, wovon man sie subtrahiren soll: so darf man nur zu dem Bruch der letztern 1 zurechnen, wodurch denn die ganze Zahl um 1 vermindert wird. Z. E.

				96		
$27\frac{3}{8}$	$136\frac{1}{2}\frac{7}{4}$		24	32	$\frac{1}{2}\frac{7}{4}$	4 | 68
		8)				
$15\frac{7}{8}$	$95\frac{2}{3}\frac{1}{2}$		3	4	$\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	3 | 63
Rest $11\frac{1}{2}$	$41\frac{5}{9}\frac{}{6}$	g. N. = 8. 3. 4. = 96.			Rest	$\frac{5}{9}\frac{}{6}$

125 §.

Die Sätze des 38 und 48 §. gelten noch, wenn gleich der Multiplicator oder Divisor Brüche sind.

Wenn also bey der Multiplication an den Factoren Brüche hängen, so kann man jeden Theil des einen Factors in jeden Theil des andern multipliciren, und zuletzt diese Producte addiren. Oder man kann

auch

auch beyde Factoren zuerst auf uneigentliche Brüche bringen, wie man es am bequemsten findet. Z. E.

$8\frac{5}{8}$
$7\frac{2}{3}$

$\frac{5}{1\,2}$
$5\frac{1}{3}$
$4\frac{3}{8}$
56

Prod. $66\frac{1}{8}$

12 8 3
4)

3 2 3

g. N. 4. 3. 2. 3. = 72

72

$\frac{5}{1\,2}$	6	30
$\frac{1}{3}$	24	24
$\frac{3}{8}$	9	27

Sum. 81

oder $1\frac{1}{8}$

Man kann auch so rechnen.

Es ist $8\frac{5}{8} \times 7\frac{2}{3} = \frac{69}{8} \times \frac{23}{3}$

69 · 23 = 1587 | $66\frac{1}{8}$

8 · 3 = 24

1587 − 144 = 1443

1443 − 1296 = 147

147 − 144 = 3

Product.

Wenn der Divisor eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch ist; so muß man ihn allemahl auf einen uneigentlichen Bruch bringen. Alsdenn ist es gemeiniglich am kürzesten, wenn man auch das Dividendum auf einen uneigentlichen Bruch bringet, besonders wenn die angehängten Brüche schon einer-

ley Benennung haben, worauf man sie auch jedesmahl leicht bringen kann. Z. E.

$$48\tfrac{2}{3} : 6\tfrac{4}{5} = 1\tfrac{46}{3} : \tfrac{34}{5}$$

146	34	730	$7\tfrac{8}{51}$ Quot.
5	3	102	
730	102	714	
		16	

Der VII. Abschnitt.

Von den Decimal-Brüchen insbesondere.

126 §.

Ein uneigentlicher Bruch von dieser Art $\frac{5832689570}{100000000}$ läßt sich ohne alle weitläuftige Rechnung auf folgende Art in die darinn enthaltne ganze und eigentliche gebrochne Zahlen auflösen. Man darf nur erwegen, daß dieser Ausdruck eben so viel sey, als $\frac{5832000000}{100000000} + \frac{689570}{100000000}$: so hat man $5832\frac{689570}{100000000}$. Die Regel würde diese seyn.

Man zertheile den Zähler in zwey Stücke, so daß das niedrigste Stück so viele Ziffern bekommt, als im Nenner Nullen sind: so wird dies letztere Stück der Zähler des anzuhängenden Bruchs von eben dem Nenner, das andre Stück aber die ganze Zahl seyn, die nebst dem vorigen wahren Bruch in dem uneigentlichen enthalten ist.

Man pflegte daher in den gewöhnlichen Rechenbüchern wohl die Regel zu geben; man solle so viele

Ziffern

Ziffern des Dividendi, als der Divisor Nullen hat, durch einen Strich, etwa auf die Art 5832|68957, rechter Hand abschneiden: so sey die Division geschehen. Man hat nun nicht nöthig den Bruch $\frac{68957}{10000}$ besonders hinzuschreiben, da man ohnehin weiß, daß die abgeschnittene Zahl sein Zähler, und die Einheit mit so vielen Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, sein Nenner werde.

Diese Art der Bezeichnung behält man mit vieler Bequemlichkeit in der Mathematik bey, nur daß man statt des Strichs hier ein Comma (,) oder einen Punkt (.) braucht, auf die Art 5832,68957. Ob zwar der Punkt auch gebraucht wird, die Multiplication zu bezeichnen: so ist doch daher keine Verwirrung zu besorgen, wenn man bey Zahlen, woran dergleichen Brüche hängen, die Multiplication nie anders, als mit dem Zeichen × andeutet.

127 §.

Auf solche Art hat man nie nöthig, den Nenner eines an einer ganzen Zahl hängenden eigentlichen Bruchs ausdrücklich hinzuschreiben, wenn dieser Nenner die 1 ist mit einer Reihe daran hängender Nullen, und wenn der Zähler des Bruchs aus eben so vielen Ziffern bestehet, als der Nenner Nullen enthält. Ein Ausdruck von dieser Art 24,5737894 wird allemahl den Quotienten bedeuten, der durch die Division dieser ganzen Zahl, ohne das Comma in Betracht zu ziehen, würde gefunden werden, wenn der Divisor die 1 wäre mit so vielen beygefügten Nullen, als nach dem Comma Ziffern folgen, deren im gegenwärtigen Fall sieben seyn würden. Also ergiebt sich von selbst, daß diese Zahl eben so viel

sey, als $24,_{1}\frac{5}{0}\frac{7}{0}\frac{3}{0}\frac{8}{0}\frac{9}{0}\frac{4}{0}$. Das Comma steht hier allemahl bey der Ziffer, welche die Einer bedeutet. Man siehet leicht, daß die Werthe der Ziffern, welche nach dem Comma gegen die rechte Hand zu folgen, nach eben dem Decimal-Gesetz abnehmen, nach welchem die Werthe der Ziffern wachsen, die von dem Ort der Einer gegen die linke fortgehen. Jede gegen die rechte Hand folgende Ziffer hat einen zehnmahl kleinern Werth, als sie in der nächst vorhergehenden Stelle würde gehabt haben. So bedeutet jede Ziffer nach dem Ort der Einer,

in der ersten Stelle Zehntheile,
in der zweyten Hunderttheile,
in der dritten Tausendtheile u. s. f.

von der Einheit. Man nehme nur die letzte Zahl zum Exempel, so ergiebt sich die Richtigkeit folgender Ausdrücke von selbst.

$24,5 = 24\frac{5}{1}\frac{}{0}$

$24,57 = 24\frac{5}{1}\frac{7}{0}\frac{}{0} = 24 + \frac{5}{1}\frac{}{0} + \frac{7}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}$

$24,573 = 24\frac{5}{1}\frac{7}{0}\frac{3}{0}\frac{}{0} = 24 + \frac{5}{1}\frac{}{0} + \frac{7}{1}\frac{}{0}\frac{}{0} + \frac{3}{1}\frac{}{0}\frac{}{0}\frac{}{0}$

u. s. f.

Es zerlegen sich demnach solche Brüche von selbst in solche Theile, deren Zähler einfache Ziffern, die Nenner folgende Zahlen sind 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. so daß jeder folgende Nenner zehnmahl grösser, als der vorhergehende ist. Man nennt sie Decimal-Brüche.

128 §.

Es lassen sich demnach die Ziffern, woraus ein Decimal-Bruch besteht, auf ähnliche Art, wie die Ziffern einer ganzen Zahl, in Ziffern verschiedener, aber abnehmender Decimal-Ordnungen eintheilen,

theilen, so wie die Ziffern einer ganzen Zahl zu verschiedenen wachsenden Decimal-Ordnungen gerechnet werden. Die Ziffer nach dem Ort der Einer gehöret zur ersten abnehmenden Ordnung, die zweyte zur zweyten u. s. f.

129 §.

Will man einen solchen Bruch, dergleichen im 127 §. der Zahl 24 beygefüget ist, für sich allein hinschreiben, ohne ihn an einer ganzen Zahl anzuhängen: so scheint es, daß man sich obiger Verkürzung nicht bedienen, und den Nenner nicht weglassen könne. Allein da in diesem Fall keine ganze Zahl vorhanden ist, so ist nur nöthig, daß man in der Stelle, wo sonst die niedrigste Ziffer dieser ganzen Zahl stehen müßte, eine o hinschreibe, und das Zeichen der Einer dabey setze.

Denn so ist $0,5737894 = \frac{5737894}{10000000}$. Diese Betrachtung läßt sich leicht allgemeiner auch auf solche Brüche anwenden, die von den bisherigen nur darin unterschieden sind, daß ihr Zähler aus weniger Ziffern bestehet, als im Nenner Nullen vorkommen, wenn man auf folgende Umstände acht hat.

130 §.

Eine auf gewöhnliche Art geschriebene ganze Zahl wird nicht verändert, wenn man linker Hand so viele Nullen, als man will beyfüget. So ist 0000743 eben so viel als 743, denn hiedurch ändert sich die Stelle der Einer nicht, wovon die Werthe der übrigen Stellen abhängen. Ist dies gewiß, so kann man dem Zähler eines Bruchs von dieser Art $\frac{743}{10000000}$ allemahl so viele Nullen voransetzen, daß die Anzahl der Ziffern und Nullen zusammengenom-

men, mit der Anzahl der Nullen im Nenner einerley werde, und so ist dieser Fall auf den vorigen gebracht. Man kann nun den Nenner weglassen, und die Ausdrücke $\frac{743}{1000000}$; $\frac{0000743}{10000000}$; 0,0000743 (129 §.), werden einerley seyn, und einerley Zahl bedeuten. Ueberhaupt also wird die niedrigste Ziffer des Zählers von der Stelle der Einer um so viele Stellen wegzurücken seyn, als der Nenner Nullen enthält. So werden demnach auch die Ausdrücke 0,000000052 und $\frac{52}{1000000000}$ imgleichen 0,00300705 und $\frac{300705}{10000000}$ einerley seyn.

131 §.

Würde man an einer ganzen Zahl rechter Hand Nullen anhängen, so würde hiedurch allerdings der Werth aller ihrer Ziffern, und der ganzen Zahl selbst geändert werden (15. 16. §.). Wenn man aber die Stelle der Einer mit einem Zeichen bemerkt, und hiedurch festsetzt, daß dies ein für allemahl die Stelle der Einer bleiben soll; so ändert auch diese Beyfügung der Nullen die Zahl gar nicht. Schreibt man nämlich nun rechter Hand eine, oder mehr Nullen hinzu, so ist es so gut, als wenn man hiedurch zwar mit 10 oder 100 u. s. f. multiplicirt, aber zugleich mit eben der Zahl wieder dividirt. Es ergiebt sich nämlich nun von selbst, daß z. E. 135,00000 $= 13\frac{5000000}{1000000}$ (127 §.) $= 135$ sey. Eben dies erstreckt sich auf jede nach den bisherigen Regeln ausgedrückte Zahl. Wenn der Ort der Einer mit einem Zeichen ein für allemahl bemerket ist; so kann man am Ende rechter Hand so viele Nullen, als man will, anhängen, ohne daß dadurch die Zahl geändert wird. So ist auch z. E. 0.0024 = 0.00240000 = $\frac{24}{10000} = \frac{240000}{10000000000}$.

132 §.

132 §.

Zwo oder mehr Zahlen, unter welchen Decimal-Brüche vorkommen, zu addiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wiederum so untereinander, daß diejenigen einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander kommen. Dieses erhält man leicht, wenn man von jeder folgenden Zahl die Ziffer, so die Einer ausdrückt, zuerst unter der Classe der Einer der vorhergehenden Zahl setzt: denn so ergeben sich die übrigen sowohl gegen die linke, als auch gegen die rechte Hand von selbst.

Hierauf addire man alle Zahlen nach den Regeln des 23 und 24 §., und bezeichne in der Summe die Ziffer mit dem Zeichen der Einer, welche in der Columne der Einer zu stehen kömmt.

Exempel.

738,2400 A	473,683
25,9836 B	0,06423
324,3000 C	0,7043
1088,5236. Summe.	474,45153

Beweis. Jeder Ausdruck von dieser Art ist ein uneigentlicher Bruch, dessen Zähler die Zahl selbst seyn würde, wenn das Zeichen (,) wegbliebe, der Nenner aber die 1 mit so viel Nullen, als nach diesem Zeichen einzelne Ziffern folgen. Wenn nun gleich in den Zahlen, welche man summiren soll, die Anzahl der Decimal-Stellen, also die Benennung ungleich ist: so kann man doch diese dadurch in allen gleich machen, wenn man rechter Hand an jeder Zahl so viele Nullen anhängt, bis alle gleich viel Decimalstellen haben (131 §.), und so sind dies lauter Brü-

che von gleicher Benennung. Deßwegen summirt man nur ihre Zähler, und behält den gemeinschaftlichen Nenner in der Summe dadurch bey, daß man so viel Decimal-Stellen rechter Hand abschneidet, als der gemeinschaftliche Nenner Nullen hat (100 §). Man siehet leicht, daß es zum würklichen summiren nicht erfordert werde, die Nullen den Zahlen, wie A und C beyzufügen. Deßwegen können sie allemahl, wie im zweyten Exempel wegbleiben.

133 §.

Zwo Zahlen sind noch von der Art, wie im vorigen §., und es wird verlangt, die kleinere von der grössern zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wie vorhin untereinander, und subtrahire nach den Regeln des 27 §. Im Rest setze man bey der Ziffer das Zeichen der Einer, welche in der Columne der Einer der gegebenen Zahlen zu stehen kommt.

Exempel.

782,37408	534,7372000
513,732	239,4307283.
Rest 268,64208	Rest 295,3064717.

Beweis. Die Regeln beruhen auf eben den Gründen, wie im vorigen §. bey der Addition, wenn man hiemit den 102 §. vergleichet. Wenn die Zahl, welche man subtrahiren soll, mehr Decimal-Stellen enthält, als die andere: so fällt es gleich in die Augen, wie die Regeln des Borgens hier angewandt werden müssen, wenn man durch Beyfügung der Nullen die Anzahl der Decimal-Stellen gleich macht. Eben deswegen sind hier die Nullen im zweyten

Exempel

Exempel nur beygefügt, da man sonst, wenn man im Rechnen geübt ist, auch hier nicht nöthig hat, sie hinzuschreiben.

134 §.

Zwo Zahlen von eben der Art ineinander zu multipliciren.

Aufl. Man setze die Zahlen, wie es bey der Multiplication ganzer Zahlen gewöhnlich ist, untereinander, und verfahre nach den Regeln des 41 §., ohne daß man während des Rechnens die Zahlen selbst anders, als ganze Zahlen ansiehet. Am Ende der Rechnung setze man das Zeichen der Einheiten so, daß rechter Hand desselben so viele Decimalstellen folgen, als in beyden Factoren zusammen vorhanden sind.

Exempel.

73,5483	0,00324
3,724	0,0000032
2941932	648
1470966	972
5148381	0,00000001036 8 Prod.
2206449	
273,8938692 Prod.	

Wenn im Product nicht so viele Ziffern herauskommen, als nach der Regel Decimal-Stellen in demselben seyn sollen: so schreibt man nach dem 130 §, linker Hand so viele Nullen nach einander hin, bis man in allen so viele Ziffern hat, als die Regel erfordert, und überdem noch eine Null für die Stelle der Einer, wie im zweyten Exempel geschehen ist.

Beweis. Es sind hier nämlich zweene Brüche zu multipliciren, deßwegen ist das Product ihrer

Zähler

Zähler des Products Zähler, und das Product ihrer Nenner des Products Nenner (115 §.). Da nun der Nenner eines jeden Factors so viele Nullen hat, als dieser Factor Decimalstellen enthält; so bekommt das Product der Nenner so viele Nullen, als die Anzahl der Decimalstellen beyder Factoren zusammen ausmacht, und dieser Nenner wird dadurch ausgedrückt, daß man im Product eben so viele Decimalstellen abschneidet (127 §.).

135 §.

Bey der Rechnung mit den Decimal-Brüchen ist es zuweilen vortheilhafter, wenn man von der gewöhnlichen Art, das Product zwoer ganzen Zahlen zu suchen, in folgendem Umstande etwas abgeht. Man sucht nämlich gewöhnlich zuerst nach dem (41 §.) das Product aus der niedrigsten Ziffer des Multiplicators in das Multiplicandum. Hierauf nimmt man die nächst höhern, und geht so nach und nach fort bis auf die höchste, da man denn die einzelnen Producte gehörig untereinander schreibt, und zuletzt summirt. Allein man kann auch mit der Multiplication durch die höchste Ziffer des Multiplicators anfangen, und sodann nach und nach auf die nächstniedrigen, bis auf die niedrigste fortgehen, da es dann sich leicht ergiebt, wie die Producte untereinander gesetzt werden müssen, um die richtige Summe derselben zu erhalten. Auf die Art liesse sich das erste Exempel des vorigen §. so berechnen.

73,5483

73,5483
3,724
220,6449
51,48381
1,470966
2941932
Prod. 273,8938692

136 §.

Eine Zahl, woran Decimal-Stellen hängen, mit einer kleinern Zahl von eben der Art zu dividiren.

Aufl. I. Wenn im Dividendo mehr Decimal-Stellen als im Divisor vorhanden sind: so verfahre man auch hier völlig nach den Regeln des 68 §., und sehe bey der ganzen Rechnung die Zahlen nicht anders als ganze Zahlen an.

II. Bleibt zuletzt kein Rest, so schneidet man im Quotienten so viele Decimal-Stellen ab, als das Dividendum mehr, denn der Divisor enthält, wie im ersten Exempel, so hat man den ganzen Quotienten.

III. Bleibt aber ein Rest, den man nach den gewöhnlichen Regeln nicht weiter dividiren kann; so bestimmt man zwar die Decimal-Stellen des bisher gefundenen Quotienten nach voriger Regel, addirt aber dazu einen Bruch, dessen Zähler der Rest ist, sein Nenner aber ein Product aus dem Divisor in die 1 mit so vielen Nullen, als der erste Theil des Quotienten Decimal-Stellen hat.

Exempel.

Exempel.

37,2224	5,816.
6,4	
320	
522	
64	
512	
102	
64	
384	
64	
384	
0	

2,3334	1,45$\frac{14}{176}$
1,6	
73	
16	
64	
94	
16	
20	
14	

Beweis. Man soll hier einen Bruch mit einem andern dividiren: also ist der Quotient ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gefunden werden, wenn man Zähler und Nenner des Dividendi gradezu mit dem Zähler und Nenner des Divisors dividirt (119 §). Aber der Quotient der Zähler ist die nach der 2 Regel des 119. §. gefundene Zahl selbst: der Quotient der Nenner ist die 1 mit so viel Nullen, als das Dividendum mehr Decimal-Stellen hat, denn der Divisor, und dieser wird durch das Abschneiden eben so vieler Decimal-Stellen im Quotienten ausgedrückt, wenn alles aufgeht. Wofern aber ein Rest bleibt, so wird der Zähler des Quotienten selbst eine ganze Zahl mit dem Bruch, welchen die Division nach den Regeln des 68 §. giebt, sein Nenner aber bleibt noch der vorhin gedachte. Demnach muß die ganze Zahl des Zählers so viele Decimal-Stellen bekommen, als die Regel ausdrückt, der Bruch, als der zweyte

Theil

Theil des Zählers, aber mit dem vorhin gedachten Nenner ebenfalls dividirt, oder, welches dasselbe ist, sein Nenner damit multiplicirt werden.

Dieser Beweis wird völlig erläutert, wenn man sich die Berechnung des vorigen Exempels so vorstellt.

$$\frac{2334}{1000} : \frac{16}{10} = \frac{2334 : 16}{100} = \frac{145\frac{14}{16}}{100} =$$

$1,45\frac{14}{16}$.

IV. Wenn der Divisor eben so viele, oder mehr Decimal-Stellen als das Dividendum enthält; so kann man vermöge des 131 §. so viele Nullen rechter Hand anhängen, als man für nöthig findet. Eben dies Verfahren kann man allemahl anbringen, wenn man den Quotienten in mehrern Decimal-Stellen ausgedrückt verlanget, als die III Regel geben würde. Man schreibt zum Dividendo so viele Nullen hinzu, als man für gut findet, (diese können auch, weil es einerley ist, dem letzten Rest beygefüget werden). Es läßt sich nämlich allemahl zum voraus absehen, wie viele Decimal-Stellen man im Quotienten erhalten wird, weil es jederzeit so viele sind, als im Dividendo mehr denn im Divisor vorkommen. Je mehr Decimal-Stellen man im Quotienten berechnet, desto genauer erhält man denselben, und zuweilen völlig genau, wenn alles aufgehet. Dies erfolgt bey dem letzten Exempel würklich, wenn man dem Dividendo drey Nullen beyfügt, wie nachstehende Berechnung zeiget.

2,334000

2,3340000	1,45875.
16	
73	
16	
64	
94	
16	
80	
140	
16	
128	
120	
16	
112	
80	
16	
80	
0	

In andern Fällen aber erhält man den Quotienten nie völlig genau in Decimaltheilen, so lange noch ein Rest bleibt.

Dieser Rest, als der Zähler des noch anzuhängenden Bruchs, ist nie grösser als der Divisor, (wenn hier nach der 1 Regel, die Zahlen noch als ganze Zahlen angesehen werden). Für jede folgende Decimalstelle des Quotienten wird der Nenner des anzuhängenden Bruchs zehnmahl grösser, also wird dieser Bruch viel kleiner, als er vorher war. Er ist nämlich nie so groß, als eine ganze Einheit von eben der Ordnung seyn würde, wozu die letzte Decimal-

Ziffer

Ziffer des Quotienten gehöret. Wenn man demnach mit der Division so lange fortfährt, bis man auf so kleine Decimalziffern kommt, die man in der Ausübung aus der Acht lassen kann: so ist man auch um so mehr berechtiget, den letzten noch anzuhängenden Bruch wegzulassen.

137 §.

Einen eigentlichen Bruch durch Decimalbrüche auszudrücken.

Aufl. Man bemerke die niedrigste Ziffer des Zählers mit dem Zeichen der Einer, wofern der Zähler nicht schon selbst Decimal-Stellen enthält; so erhält man die Freyheit, rechter Hand so viele Nullen, als man will, anzuhängen, ohne daß sich die Grösse des Zählers ändert (131 §.). Hierauf dividire man den Zähler mit dem Nenner nach den Regeln des vorig. §.: so wird man den Quotienten, welcher mit dem Werthe des Bruches einerley ist, entweder genau, oder doch wenigstens so nahe, als man will, in Decimal-Theilen erhalten.

Exempel.

1.0	| 0,5	4,0	| 0,8	3.00	| 0,75
2	|	5	|	4	|
10		40		28	
0		0		20	
				4	
				20	
				0	

2,000	0,666 $\frac{2}{3000}$	7,000	0,777 $\frac{7}{9000}$
3		9	
18		63	
20		70	
3		9	
18		63	
2		7	

Es fällt sogleich in die Augen, daß in den beyden letzten Exempeln nothwendig allemahl ein Rest bleiben müsse, woraus also erhellet, daß sich nicht jeder Bruch genau in zehntheilichten Brüchen ausdrücken lasse. Wenn man demnach in solchen Fällen die Einheit in 10, oder 100, oder 1000 Theile, u. s. f. eintheilt, so daß die Anzahl der Theile ein multiplum der 10 mit sich selbst ist, und wenn man auch diese Anzahl der Theile so groß macht, wie man will: so wird doch nie eine bestimmte Menge derselben zusammen genommen eben so viel von der Einheit ausmachen, als der gegebene Bruch. Im ersten Exempel erhält man nie zwey Drittheile, und im zweyten nie sieben Neuntheile der Einheit. Je mehr Decimalstellen man inzwischen berechnet, desto genauer wird der Werth des Bruchs in Decimal-Theilen ausgedrückt, und der Irrthum, den man mit Weglassung des noch anzuhängenden Bruchs begehet, kann kleiner werden, als jede Grösse, die sich angeben läßt. Dies letztere werden folgende Sätze deutlicher ins Licht setzen.

138 §.

Wenn zwo Grössen A und *e* ungleich, und so sehr als man will unterschieden sind; so kann man die kleinere *e* so vielmahl zu sich selbst addiren, daß die Summe endlich grösser als *A* wird: oder welches einerley ist, man kann *e* mit einer so grossen ganzen Zahl *m* multipliciren, daß das Product *me* grösser als *A* wird, *e* sey so klein, als man wolle, wofern *e* nur noch eine Grösse, und mit A von einerley Art ist.

139 §.

Wenn demnach eine Grösse *A* mit einer ganzen Zahl *m* dividirt wird; so kann man diese Zahl *m* allemahl so groß nehmen, daß $\frac{A}{m}$ kleiner wird, als jede andre Grösse *e*, die sich angeben läßt, sie sey so klein, als man will.

Beweis. Es sey *e* eine Grösse, so klein, als man will: so nehme man *e* so vielmahl, daß die Summe oder das Product $me > A$ wird (138 §.). Ist dies geschehen, so hat man $e > \frac{A}{m}$ (47 §.), oder $\frac{A}{m} < e$.

140 §.

Diese beyden letzten Sätze lassen sich leicht auf den 136 und 137 §. anwenden. Der dem Quotienten beyzufügende Bruch ist allemahl ein gebrochener Bruch, dessen Zähler kleiner, als 1, sein Nenner aber ein multiplum von 10 mit sich selbst ist, welches letztere so groß werden kann, als man will. Wenn also der Zähler dieses gebrochnen Bruchs A

ist, und sein Nenner m: so ist m entweder 10, oder 100, oder 1000 u. s. f. Verlangt man nun, dieser Bruch soll kleiner werden, als e, wo e z. E. ein Milliontheilchen, Billiontheilchen u. s. f. des ganzen bedeuten kann: so darf man nur so lange fortrechnen, bis $m \triangleright$ als eine Million, Billion u. s. f. wird, oder welches einerley ist, bis $me \triangleright 1$ wird. Ist dies geschehen, so ist auch $me \triangleright A$, weil $A \triangleleft 1$ seyn muß, folglich $\frac{A}{m} \triangleleft e$.

141 §.

Wenn man mit solchen Brüchen, die nicht völlig genau in Decimal-Theilen ausgedrückt sind, dahin denn alle nach den Regeln des 135 und 136 §. berechnete Quotienten gehören, wenn der letzte noch anzuhängende Bruch weggelassen ist, aufs neue Rechnungen vornimmt; so können die Resultate nicht genau herauskommen. Sie werden mehr oder weniger unrichtig seyn, nachdem man jene Quotienten mehr oder weniger genau berechnet hat. Ob man nun gleich in der Anwendung mit diesen nicht ganz genau richtigen Resultaten in den meisten Fällen zufrieden seyn kann: so muß man dennoch die Prüfung, wie weit sie richtig sind, anstellen, und die Grösse des Fehlers schätzen können.

Bey der Addition zwoer Zahlen von dieser Art kann die letzte Ziffer schon unrichtig seyn, wenn an den summirten Zahlen gleichviel Decimal-Stellen hängen. Z. E.

$\frac{2}{3} = 0.666666$ rc.	$\frac{7}{9} = 0.777777$ rc.
$\frac{1}{3} = 0.333333$ rc.	$\frac{2}{3} = 0,666666$ rc.
$1 = 0.999999$ rc.	$\frac{1}{9}^3 = 1,444443$ rc.

Im

Im ersten Exempel sind alle Ziffern der Summe richtig, im zweyten aber ist die niedrigste Ziffer zu klein, wovon die Ursache leicht in die Augen fällt. Hätte man nämlich in jeder summirten Zahl noch eine Ziffer mehr genommen: so wäre in der siebenden Decimal-Stelle die Summe 13 geworden, und dies hätte die sechste Decimal-Stelle der Summe um Eins vergrössert. Im ersten Exempel wäre dies nicht geschehen.

Aus einer ähnlichen Ursache kann bey der Subtraction die letzte Ziffer im Rest zu groß herauskommen. So findet man durch die Subtraction.

$\frac{13}{9}=1,444444$ rc.	$\frac{7}{9}=0,777777$ cc.
$\frac{7}{9}=0,777777$ rc.	$\frac{1}{3}=0,444444$ rc.
$\frac{2}{3}=0,666667$ rc.	$\frac{4}{9}=0,444444$ rc.

Aber im ersten Exempel ist die letzte Ziffer des Restes um 1 zu groß, weil beym subtrahiren in der siebenden Decimal-Stelle, wenn sie ausgedrückt wäre, von der Ziffer 4 in der sechsten Stelle 1 wäre weggeborgt worden. Im zweyten Exempel fällt diese Ursache weg, und es kommen alle Ziffern des Restes richtig heraus.

142 §.

Bey der Multiplication zwoer Zahlen von der Art, wie im vorigen §., verfahre man wie im 135 §. gelehret worden: so läßt sich die Prüfung ebenfalls ohne Schwierigkeit anstellen, wie weit die Ziffern des Products richtig sind. Z. E.

$\frac{2}{3}$=0,666666	
$\frac{1}{3}$=0,333333	
0,1999998	
199999	8
19999	98
1999	998
199	9998
19	99998
$\frac{2}{9}$=0,2222217	77778

Es ergiebt sich leicht, daß hier aufs höchste nur die sechs höchsten Ziffern richtig seyn können, und die siebente gewiß schon zu klein sey. Denn die siebente Ziffer 8 des ersten einzelnen Products ist aus einer ähnlichen Ursache schon zu klein, die bey der Addition im vorig. §. statt hatte. Es würde nämlich diese Ziffer nicht 8, sondern 9 geworden seyn, wenn im Multiplicando nur noch eine Stelle mehr genommen wäre. Die Ziffern, welche im Product nach der siebenten folgen, werden um so weniger richtig seyn, weil immer mehr Ziffern in den einzelnen Producten fehlen, die einen Einfluß in die Summe haben würden.

Die siebente Ziffer des Products aber ist nicht allein aus der Ursache zu klein, weil die siebente im ersten einzelnen Product zu klein ist; sondern auch deßwegen, weil in der siebenten Columne unten noch eine Ziffer fehlt, die hinzu gekommen seyn würde, wenn man im Multiplicator eine Ziffer mehr genommen hätte. Dies wäre im gegenwärtigen Fall die 1 gewesen.

Endlich

Endlich drittens erhellet, wenn alles vollständig wäre, daß bey der Addition der achten Columne, auch mehr würde in mente geblieben, und hiedurch ebenfalls die Summe der siebenten Columne vermehrt worden seyn.

Diese drey Umstände zusammengenommen ergeben, daß wenn alles vollständig wäre, zur siebenten Columne so viel hätte hinzukommen können, daß bey der Addition ein mehreres in mente geblieben, und hiedurch auch die sechste Ziffer der Summe grösser geworden wäre, wie es denn leicht erhellet, daß im Exempel die Ziffer 2 statt 1 hätte herauskommen müssen.

Wenn man diese Sache genauer ansiehet: so nimmt man leicht wahr, daß es unnöthig sey, die nach der siebenten Decimalstelle folgenden Ziffern in den einzelnen Producten hinzuschreiben, die im Exempel durch einen Strich von den übrigen abgesondert sind. Man kann sie füglich alle weglassen, und man wird doch das Product bis auf die zwo letzten Ziffern richtig herausbringen. Dies ist der Grund von der so genannten abgekürzten Multiplication, und man nimmt ohne Schwierigkeit wahr, wie sich dies Verfahren in jedem andern ähnlichen Fall anbringen lasse. Z. E.

$7\frac{3}{7} = 7,4285714$
$3\frac{4}{7} = 3,5714285$

22,2857142
3,71428570
51999997
742857
297140
14856
5936
370

26,53061146

Man multiplicire hier nemlich mit jeder nächstfolgenden Ziffer des Multiplicators, nach den Zehntheilen, eine Ziffer weniger im Multiplicando, als mit der nächst vorhergehenden. In dem gefundenen Product aber sind die drey letzten Ziffern noch zweifelhaft. Denn in der siebenten Columne konnte nicht allein die oberste Ziffer zu klein seyn; sondern es fehlt auch noch unten eine Ziffer. Also kann man nur die fünf ersten Decimal-Stellen für richtig annehmen.

143 §.

Wenn man eine Zahl von dieser Art $26\frac{2}{4}\frac{6}{9} = 26.53061\,22$ mit einer andern ähnlichen $7\frac{3}{7} = 7,4285714$ dividiren soll; so kann man eine ähnliche Verkürzung anbringen. Man läßt nemlich bey jeder folgenden Operation von den Ziffern des Divisors die niedrigste weg, da sich dann der Quotient auf folgende Art ergiebt.

$26\frac{26}{49} = 26,5306122$
$7\frac{3}{7} = 7,4285714$
22,2857142

$3,5714287 = 3\frac{4}{7}$

4,2448980
7,428571
3,7142855

5306125
7,42857
5199999

106126
7,4285

31841
7,428
29712

2129
7,42
1484

645
7,4
592

53
7
49

4

Der Grund dieses Verfahrens ergiebt sich leicht, wenn man damit die im vorig. § beschriebene verkürzte Art zu multipliciren vergleicht. Bey Berechnung der einzelnen Producte läßt man aus dem einen Factor nach und nach immer die niedrigste Zif-

fer weg. Also kann man hier das Dividendum als ein Product ansehen, daß durch die Multiplication des Quotienten in den Divisor auf eben die Art entstanden wäre, indem man in dem Factor, der hier den Divisor abgiebt, von den niedrigsten Ziffern eine nach der andern bey der Multiplication weggelassen hätte, welches durch die Vergleichung dieser Berechnung mit der Rechnung des vorigen § deutlich wird.

Im gegenwärtigen Exempel ist die letzte Ziffer des Quotienten nur unrichtig. Aber man siehet wohl, daß man sich in andern Fällen auf die Richtigkeit der beyden letzten Ziffern nie verlassen könne.

Der VIII. Abschnitt.

Von den vier Rechnungs-Arten in genannten Zahlen.

144 §.

Es ist eigentlich kein Geschäfte der theoretischen Rechenkunst, die Anwendung der bisherigen Rechnungs-Regeln zu zeigen. Wer diese Anwendung machen will, muß verschiedene Kentnisse von der Beschaffenheit der Sachen selbst besitzen, die man durch Zahlen auszudrücken gewohnt ist. Manche derselben lernt man gar nicht kennen, wofern man sich nicht mit denjenigen Wissenschaften bekannt macht, die davon besondern Unterricht geben, dahin denn vorzüglich alle Theile der Mathematik gehören. Mit vielen hieher gehörigen Kentnissen wird man versehen, wenn man sich mit den mannigfaltigen

Gewer-

Gewerben und Handthierungen des gemeinen Lebens bekannt macht. Einige dieser Kenntnisse haben sich so nothwendig gemacht, daß fast niemand derselben entbehren kann, daher man auch unvermerkt bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens davon wenigstens einigermassen unterrichtet wird. Es gehören hieher vorzüglich die Werthe der Münzen, die verschiedene Beschaffenheit der Maaße, der Gewichte, und dergleichen mehr. Deßwegen lernt man bey Dingen von dieser Art am leichtesten, wie von den bisherigen Rechnungs-Regeln allerley nützliche Anwendungen gemacht werden können.

145 §.

Man muß hiebey vor allen Dingen wissen, in wie viele Theile man eine Münze von einem bekannten Werthe, ein bekanntes Maaß, ein bekanntes Gewicht, u. s. f. einzutheilen gewohnt ist, und was diese Theile für Namen führen. Diese Eintheilungen und Nahmen sind völlig willkührlich, und eben daher ist die grosse Verschiedenheit entstanden, die hiebey obwaltet. Bey den folgenden Exempeln werden die nachstehenden Eintheilungen gebraucht werden. Ein Thaler gilt 24 Groschen, und ein Groschen 12 Pfenninge. Ein Centner hält 110 Pfund, ein Pfund 16 Unzen, eine Unze 8 Drachmen, eine Drachma 3 Scrupel, ein Scrupel 20 Gran. Eine Ruthe hat 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll, ein Zoll 12 Linien, eine Linie 12 Scrupel. Weil es beym Rechnen weit bequemer ist; so theilen die Mathematiker die Maaße gern in 10 Theile. So hält die Ruthe 10 Fuß, der Fuß 10 Zoll, der Zoll 10 Linien, u. s. f.

146 §.

146 §.

Man ist nicht gewohnt, eine Summe Geldes in lauter Pfenningen, oder Groschen auszudrücken, so wie man ein Gewicht nicht in lauter Granen, eine Länge nicht in lauter Zollen, Linien, oder Scrupel ausdrückt: es müste denn seyn, daß man hiezu eine besondere Ursache hätte. In den allermeisten Fällen drückt man eine Summe kleiner Theile, die einen grössern Theil mehrmahl enthält, durch diese grössern Theile aus. Wenn man demnach beym Rechnen auf eine Anzahl dergleichen kleiner Theile kommt, die mehr solche Theile enthält, als auf das nächst grössere Maaß, Gewicht, und auf die nächst grössere Münze u. s. f. gerechnet werden: so drückt man eine solche Zahl gewöhnlich durch die nächst grössere Einheit aus. Weiß man die Anzahl der Theile, die das nächst grössere Maaß, Gewicht, u. d. gl. ausmachen, so darf man nur mit dieser Zahl dividiren. Der Quotient wird ausdrücken, wie viele Einheiten der grösseren Art in der dividirten Zahl enthalten sind: da dann der Rest die noch übrigen Theile der kleinern angiebt (52 §).

Wenn 1 Gr. $= \frac{1}{24}$ Thl.

so sind 327 Gr. $= 13\frac{27}{24}$ Thl. $=$ 13 Thl. 15 Gr.

Wenn 1 Pf. $= \frac{1}{110}$ Cent.

so sind 4634 Pf. $= 42\frac{34}{110}$ C. $=$ 42 C. 14 Pf.

Wenn 1 Fuß $= \frac{1}{12}$ Ruth.

so sind 519 F. $= 43\frac{9}{12}$ R. $=$ 43 R. 3 F.

Wenn aber 1 F. $= \frac{1}{10}$ R.

so sind 519 F. $=$ 51,9 R. $=$ 51 R. 9 F.

Dies Verfahren nennet man eine genannte Zahl auf eine andre Benennung, oder einen andern Nahmen bringen. So sind in den angeführten

Exem-

Exempeln solche Zahlen, die den kleinern Nahmen hatten, auf grössere Nahmen gebracht.

147 §.

Soll man umgekehrt eine Zahl, die den grössern Nahmen hat, auf einen kleinern Nahmen bringen, d. i. eine Anzahl der grössern Theile durch die darin enthaltenen kleinern Theile ausdrücken: so ergiebt sich von selbst, daß man für jeden grössern Theil so viele kleinere rechnen müsse, als diesen grössern Theil ausmachen. Diesemnach muß man mit der Anzahl dieser Theile multipliciren (30 §). Man darf also nur auf eine ähnliche Art, wie vorhin, 24 Gr. statt 1 Thl., 110 Pf. statt 1 Cent. u. s. f. schreiben: so ergiebt sich die übrige Rechnung von selbst.

Wenn 1 Thl. = 24 Gr.: so sind 13 Thl. 15 Gr. = 13 × 24 Gr. + 15 Gr. = 327 Gr.

Wenn 1 Centner = 110 Pf.: so sind 42 C. 14 Pf. = 42 × 110 Pf. + 14 Pf. = 4634 Pf.

Wenn 1 Ruthe = 12 Fuß: so sind 43 R. 3 F. = 43 × 12 F. + 3 F. = 519 F.

Wenn aber 1 R. = 10 F.: so sind 51 R. 9 F. = 51, 9 R. = 51, 9 × 10 F. = 519 F.

148 §.

Es erstreckt sich eben dies Verfahren auch auf gebrochene genannte Zahlen. Man kommt nemlich häufig auf Brüche, deren Nenner die Einheit nicht eben so theilt, wie man es sonst gewohnt ist: und es hat weiter keine Schwierigkeit, einen solchen Bruch durch die darin enthaltenen bekannten Theile des Ganzen auszudrücken, wenn man nur wie vorhin statt des Ganzen die Anzahl der darin enthaltenen kleinern Theile schreibt.

So

So ist $\frac{3}{5}$ Thl. $= \frac{3}{5}$. 24 Gr. $= \frac{72}{5}$ Gr. $= 14\frac{2}{5}$ Gr. und $\frac{2}{5}$ Gr. $= \frac{2}{5}$. 12 Pf. $= \frac{24}{5}$ Pf. $= 4\frac{4}{5}$ Pf.

Ferner $\frac{7}{8}$ C. $= \frac{7}{8}$. 110 Pf. $= 7\frac{7}{8}$ Pf. $= 96\frac{1}{4}$ Pf. und $\frac{1}{4}$ Pf. $= \frac{1}{4}$. 16 Unzen $= 4$ Unzen.

Eben so $\frac{4}{9}$ R. $= \frac{4}{9}$. 12 F. $= \frac{48}{9}$ F. $= 5\frac{1}{3}$ F. und $\frac{1}{3}$ F. $= \frac{1}{3}$. 12 Zoll $= 4$ Zoll,

oder in Decimal-Theilen.

$\frac{4}{9}$ R. $= 0.444$ rc. R. $= 4$ F. 4 Z. 4 L. rc.

149 §.

Genannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe diejenigen alle in einer Columne untereinander, die einerley Nahmen haben, und addire jede Columne besonders.

Man fange aber mit derjenigen Columne an, die den kleinsten Nahmen hat, und bringe die Summe gleich auf den nächst grössern Nahmen. Die herausgebrachte Zahl, welche den nächst grössern Nahmen hat, addire man mit zur nächst grössern Columne, und schreibe den Rest, welcher den kleinern Nahmen behält, unter der gleichnahmigen Columne.

Exempel.

7 C.	86 Pf.	14 Unz.	7 Dr.
4	93	9	5 19 Gran.
2	74	12	4 54.
	255	37	17 73
	110	16	8 60
	220	32	16 13 Gran
15 C.	35 Pf.	5 Unz.	1 Dr.
	48 Thl.	21 Gr.	9 Pf.
	29	14	5
	7	19	7
		55	21
		24	12
		48	9 Pf.
	86 Thl.	2 Gr.	

150 §.

150 §.

Eine kleinere genannte Zahl von einer grössern zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen, welche einerley Nahmen haben, wie vorhin untereinander, und subtrahire jeden Theil der kleinern Zahl von dem gleichnahmigen der grössern.

Dafern dieser gleichnahmige Theil der grössern Zahl kleiner ist, als diejenige Zahl, welche man davon nach der ersten Regel subtrahiren soll: so borge man von dem Theil, welcher den nächst grössern Nahmen hat, eins weg und rechne dafür so viele Einheiten zur nächst kleinern Columne, als diese geborgte Einheit ausmachen.

Exempel.

		12	
15 Ruth	9 Fuß	3 Zoll	7 Lin.
8	4	10	3
7 R.	4 F.	5 Z.	4 L.

	24	12	
28 Thl.	14 Gr.	3 Pf.	
19	21	8	
8 Thl.	16 Gr.	7 Pf.	

	109	16	
97 Cent.	0	0	
24 C.	73 Pf.	3 U.	
72 C.	36 Pf.	13 U.	

151 §.

Eine genannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl.

Aufl. Man multiplicire nach einander die verschiedenen Theile der genannten Zahl, mache bey dem Theil, welcher den kleinsten Nahmen hat, den Anfang, und gehe sodann zu den nächst grössern Theilen fort. Allemahl aber bringe man das gefundene Product auf die nächst grössere Benennung, wie bey der Addition.

7 Thl. 16 Gr. 5 Pf.
27 27 27
189 112
18 32
11

443 | 135
24 | 12
203 | 15
24 | 12
192 | 3 Pf.
207 Thl. 11 Gr. | 18 Thl. 11 Gr.

17 Pf. 14 U. 3 Dr.
94 94 94
68 56
153 126
84 35

1351 | 282
16 | 8
128 | 24
71 | 42
16 | 8
64 | 40
1682 Pf. 7 U. | 84 Pf. 2 Dr. | 35 U.

152 §.

152 §.

Eine genannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. Man dividire nach einander die Theile der genannten Zahl so, daß man mit demjenigen Theil anfängt, welcher den höchsten Nahmen hat, und sodann auf die nächst niedrigen fort gehet.

Die Reste bringe man allemahl auf die nächst kleinere Nahmen (148 §), und rechne sie jedes mahl zum nächst kleinern Theil des Dividendi.

Exempel.

113 Pf. 9 U. 3 Dr.

7 | 16 32

43 | 16 Pf. 25 | 3 U. 35 | 5 Dr.

7 7 7

42 21 35

1 4 0

mult. 16 U. mult. 8

32 Dr.

Quot. 16 Pf. 3 U. 5 Dr.

127 Thl. 18 Gr. 11 Pf.

38 312 312

114 | 3 Thl. 330 | 8 Gr. 323 | 8 ½ Pf.

13 38 38

mlt. 24 304 304

52 26 19

26 mult. 12

312 Gr. 52

26

312 Pf.

Quot. 3 Thl. 8 Gr. 8 ½ Pf.

153 §.

Eine Zahl wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man sie in den Zähler desselben multiplicirt, und was herauskommt, durch den Nenner dividirt: man dividirt eine Zahl mit einem Bruch, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruch multiplicirt (113 §). Also wird man die beyden letzten Aufgaben auch auflösen können, wenn der Multiplicator, oder Divisor Brüche sind.

Exempel.

38 Pf. mult. $\frac{7}{9}$

15 U. mult. $\frac{7}{9}$

5 Dr. mult. $\frac{7}{9}$

38 Pf. mult. 7 — 15 U. mult. 7 — 5 Dr. mult. $\frac{7}{9}$

266 — 105

6 — 4

109 | 6 Pf. — 35 | 4 U.

16 | — 8 |

69 — 32

13 U. — 3 Dr.

272 | Pf. div. 9 — 32 | 5 U. — 9 | $\frac{1}{3}$ Dr.

30 Pf. — 45 | l

2 — 9

9 — 45

2 — 0

16

32 U.

Product. 30 P. 5 U. $\frac{1}{3}$ Dr.

17 Thl. 5 Gr. 7 Pf. mult. $\frac{5}{8}$

8 — 8

136 — 40

1 — 4

44 | l 1 Thl. — 56 | 4 Gr.

24 — 12 |

137 Thl. 20 Gr. — 48

8 Pf.

137 Thl. | 27 Thl.
5
10

37
5

35

2
24
---
48 Gr.

20 Gr. | 13 Gr.
48

68
5

18
5

15

3
12
---
36 Pf.

8 Pf. | 8 4/5 Pf.
36

44
5

40

4

Quot. 27 Thl. 13 Gr. 8 4/5 Pf.

154 §.

Die bisherigen Rechnungs-Regeln sind zulänglich, in allen Fällen, wenn aus gegebenen Zahlen andre unbekannte Zahlen gesucht werden sollen, die unbekannten Zahlen zu finden. Sie lehren die einfachen Operationen dieser Wissenschaft, die man aber in vorkommenden Fällen bald so, bald anders mit einander verbinden muß, um die gesuchten Zahlen herauszubringen. Sie machen eigentlich die allerersten Anfangsgründe dieser Wissenschaft, die so genannte Elementar-Rechenkunst aus. Bey verwickelten Rechnungsfragen muß man genauer wissen, wie man mit den gegebenen Zahlen umzugehen habe, welche Rechnungsarten man mit ihnen vornehmen, und in welcher Ordnung dieses geschehen müsse. In den meisten gewöhnlichen Rechenbüchern wird dies alles nur in speciellen Exempeln gewiesen, und dies ist auch nach der Absicht, weswegen diese Bücher aufgesetzt sind, ziemlich zulänglich, wofern anders die Regeln selbst nur deutlich vorgetragen,

und die Gründe derselben einigermassen auseinander gesetzt werden. Allein, wenn die Rechenkunst als ein Theil der Mathematik betrachtet, und in allen ihren übrigen Theilen hiernächst mit Vortheil angewandt werden soll: so ist nöthig, über die mancherley Arten, wie man die Zahlen mit einander vergleichen, und aus gegebenen Zahlen andre suchen kann, nunmehro so allgemeine Betrachtungen anzustellen, daß man dadurch in den Stand gesetzet wird, in jedem vorkommenden Fall selbst zu beurtheilen, welche von den mannigfaltigen Regeln anzuwenden sey, die in den gewöhnlichen Anweisungen zur Rechenkunst unter so vielerley Namen vorgetragen werden. Ja, diese Untersuchungen müssen so allgemein gemacht werden, daß sie sich auch da anwenden lassen, wo man mit Vergleichungen andrer Grössen zu thun hat, die man eben nicht als Zahlen betrachtet.

Der IX. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

155 §.

Zwo ungleiche Grössen sind allemahl um eine gewisse Differenz unterschieden, und ein Paar andre Grössen können um eben diese Differenz unterschieden seyn. Es ist z. E. $7-4=3$, und $8-5=3$. Man kann also sagen: 8 übertreffe 5 um eben so viel, als 7 die Zahl 4 übertrift, und dies

kann

kann man so kurz ausdrücken: 8 — 5 = 7 — 4. Vier Grössen von dieser Art, wenn nämlich die erste von der zweyten um eine eben so grosse Differenz unterschieden ist, wie die dritte von der vierten, heissen: Arithmetische Proportional-Grössen. Auf die Frage: um wie viel 8 von 5 unterschieden sey, muß man eben so antworten, als auf die Frage: um wie viel 7 von 4 unterschieden sey? Und diese Beziehung zwoer Grössen gegen einander, vermöge welcher sie um eine gewisse Differenz unterschieden sind, nennt man ihr Arithmetisches Verhältniß gegen einander. Die Grössen selbst heissen die Glieder (termini) des Verhältnisses. Es ist demnach einerley, ob man sagt, ein Paar Grössen A und B sind von einander um eine eben so grosse Differenz unterschieden, wie ein Paar andre C und D; oder ob man sagt, das Arithmetische Verhältniß der beyden ersten, sey dem Arithmetischen Verhältniß der beyden letzten gegen einander gleich. Diese Gleichheit zweyer Arithmetischen Verhältnisse heißt eine Arithmetische Proportion, und ihre Glieder sind die Grössen selbst, welche die Proportion ausmachen.

156 §.

Das Arithmetische Verhältniß zwoer Grössen gegen einander wird am natürlichsten durch das zwischen beyden gesetzte Zeichen der Subtraction angezeiget, da denn das Zeichen der Gleichheit zwischen beyden gleichen Verhältnissen die Arithmetische Proportion ausdrückt, wie im vorig. §. 8 — 5 = 7 — 4. In den Schriften der Ausländer findet man die Arithmetische Proportion auch so bezeichnet: 8.5 :: 7.4, aber die vorige Art wird in der Folge beybehalten werden.

157 §.

Weil man hier eben nicht besonders darauf siehet, welches von den beyden Gliedern des Verhältnisses das grössere, und welches das kleinere sey; sondern eigentlich nur ausdrücken will, daß die beyden ersten Grössen von einander um eben so viel, wie die beyden letzten unterschieden sind: so ist es gleichgültig, ob man das grössere, oder das kleinere Glied eines Verhältnisses voransetzet. Man kann auch schreiben $5-8=4-7$, und man kann den Ausdruck so erklären: um wie viel 5 kleiner, als 8 ist, um so viel ist auch 4 kleiner, als 7.

Das erste und dritte, imgleichen das zweyte und vierte Glied einer arithmetischen Proportion, werden ihre gleichnahmigen Glieder genannt. Also ist es gleich viel, ob die beyden ersten gleichnahmigen Glieder grösser, oder ob sie kleiner, als die beyden letzten sind.

158 §.

Die Differenz zwoer Zahlen von einander wird auch der Nahme ihres arithmetischen Verhältnisses genannt: dieserwegen kann man folgende zwo Regeln festsetzen.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleiche Nahmen haben: so sind die Verhältnisse gleich.

Umgekehrt:

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleich groß sind: so haben sie gleiche Nahmen.

Wenn demnach D den Nahmen des Verhältnisses bedeutet; so siehet man leicht, daß der allgemeine Ausdruck:

(A+D)

$$(A+D)-A=(B+D)-B$$

oder auch

$$A-(A+D)=B-(B+D)$$

eine jede arithmetische Proportion bezeichnen könne.

159 §.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mittlern Glieder so groß, als die Summe der beyden äussern.

Beweis. Jede arithmetische Proportion läßt sich so ausdrücken:

$$(A+D)-A=(B+D)-B$$

oder: $A-(A+D)=B-(B+D)$ (158 §.)

In beyden Fällen hat man $A+(B+D)=(A+D)+B$.

160 §.

Es sind drey Grössen gegeben, man soll zu ihnen die vierte arithmetische Proportional-Grösse finden.

Aufl. Man addire die zweyte zur dritten, und subtrahire von der Summe die erste: so ist der Rest die gesuchte Grösse.

Beweis. Wenn A, B, C, die gegebenen Grössen sind, und X die gesuchte ist: so soll die Proportion wahr seyn, $A-B=C-X$. Demnach ist $A+X=B+C$ (159 §.), also $X=B+C-A$ (28 §.).

Exempel.

Es sind die Zahlen, 17, 30, 126 gegeben; so giebt die Rechnung die Zahl 139 und man hat also $17-30=126-139$.

126
30
156
17
139

Man siehet leicht, daß die Summe der beyden letzten Zahlen grösser, als die erste seyn müsse, sonst würde man nicht subtrahiren können. In der Folge wird zwar der Begrif von der Subtraction erweitert werden, so daß man auch in diesem Fall in einem gewissen Verstande noch subtrahiren kann: allein diese Untersuchung bleibt zur Zeit noch ausgesetzt.

161 §.

Wenn die Summe zwoer Zahlen $A+F$ eben so groß ist, als die Summe zwoer andern Zahlen $B+C$: so sind allemahl die zwo Zahlen, welche die eine Summe ausmachen, zwischen den beyden andern mittlere arithmetische Proportional-Zahlen.

Beweis. Weil $A+F=B+C$; so ist $F=B+C-A$ (28 §.). Wenn aber $A-B=C-X$, so ist auch $X=B+C-A$ (160 §.). Also $X=F$, und $A-B=C-F$.

162.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer arithmetischen Proportion gleich groß sind: so heißt sie eine stetige Proportion (continua). Von der Art wäre die Proportion $5-8=8-11$. Der allgemeine Ausdruck $A-(A+D)=B-(B+D)$ (158 §.) läßt sich leicht für diesen Fall einrichten, wenn man $A+D=B$ setzt. Nun erhält man $A-(A+D)=(A+D)-(A+2D)$. Wenn man in dem Ausdruck $(A+D)-A=(B+D)-B$ die Grösse $A=B+D$ setzt: so wird $(B+2D)-(B+D)=(B+D)-B$, welcher Ausdruck mit dem vorigen einerley in umgekehrter Ordnung anzeigt.

163 §.

Eine Proportion von dieser Art hat also nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches hier das mittlere heißt, kommt eigentlich zwey mahl vor.

Die Summe der äussern Glieder ist hier doppelt so groß, als das mittlere (159 §.), und aus den beyden ersten wird das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt, vom Product aber das erste subtrahirt (160 §.). Das doppelte zweyte Glied muß also hier grösser, als das erste seyn, aus der im 160 §. schon angeführten Ursache.

164 §.

Wenn A und B die beyden ersten Glieder sind: so erhält man auch das dritte, wenn man zum zweyten B den Nahmen des Verhältnisses $B - A = D$ addirt, wofern B grösser als A ist: im Gegentheil aber, wenn man die Differenz $A - B$ von B subtrahirt. Im ersten Fall werden die drey Größen diese seyn: A, $A+D$, $A+2D$. Man kann sodann die Differenz D zum dritten Gliede aufs neue addiren: so erhält man vier stetige arithmetische Proportional-Grössen. A, $A+D$, $A+2D$, $A+3D$ (quatuor continue arithmetice proportionales) da dann die zweyte und dritte die beyden mittlern stetigen arithmetischen Proportional-Grössen genannt werden.

Es erhellet, daß man auf ähnliche Art fünf, sechs, und mehr stetige arithmetische Proportional-Grössen zuwege bringen könne, wenn man die Differenz jedesmahl wieder zum letzten Gliede addirt. Man erhält auf solche Art eine Reihe von Zahlen, worinn jedes Glied zum nächst vorhergehenden einerley arithmetisches Verhältniß hat, und man nennt sie eine

arithmetische Progression. Wäre das zweyte Glied kleiner, als das erste: so müßte man die Differenz allemahl subtrahiren, und man erhält sodann eine abnehmende, so wie im ersten Falle eine wachsende arithmetische Progression. Dergleichen Progressionen würden folgende seyn.

4 7 10 13 16 19 22 25 u. s. w.
223 213 203 193 183 173 u. s. w.

165 §.

Es sind zwo Grössen gegeben, man soll zwischen ihnen eine oder auch mehr mittlere arithmetische Proportional-Grössen suchen.

I. Aufl. Man addire beyde Grössen zusammen und dividire die Summe durch 2, so hat man eine mittlere arithmetische Proportional-Grösse zwischen den gegebenen.

So findet man zwischen 123 und 175 die mittlere Zahl 149.

123
175
298
2,
149

Beweis. Wenn A und B die gegebenen Grössen sind und X die gesuchte ist: so soll die Proportion richtig seyn $A - X = X - B$. Demnach wird $2X = A + B$ (163 §.) und $X = \frac{1}{2}(A + B)$.

II. Aufl. Wenn A das erste Glied und D die Differenz der Glieder ist, so muß das gesuchte zweyte Glied $X = A + D$ seyn: demnach wird das dritte Glied $= A + 2D$. Aber dies ist das gegebene B: also hat man $A + 2D = B$. Hieraus folgt, $2D = B - A$, und $D = \frac{1}{2}(B - A)$. Dies zum ersten gegebenen Gliede A addirt, muß also das gesuchte

zweyte $X = A + \frac{1}{2}(B - A)$ geben, und hieraus folgt die Regel:

Man addire die halbe Differenz der gegebenen Grössen zum ersten Gliede: so ist die Summe die gesuchte mittlere Grösse.

Wenn wie vorhin $A = 123$ $B = 175$ ist: so giebt die nebenstehende Rechnung ebenfalls $X = 149$.

B	175
A	123
B—A	52
	2,
$\frac{1}{2}$(B—A)	26
	149.

Sollte aber das erste Glied A grösser, als das letzte gegebene B seyn: so muß man die halbe Differenz der gegebenen Grössen $\frac{1}{2}(A - B)$ vom ersten Gliede *A* subtrahiren. Denn ist D die Differenz der Glieder: so ist in diesem Fall $X = A - D$, und $B = A - 2D$ (164 §). Hieraus folgt, $B + 2D = A$, und $2D = A - B$, also $D = \frac{1}{2}(A - B)$ und $X = A - \frac{1}{2}(A - B)$.

Wenn $A = 396$, und $B = 217$: so giebt die beygefügte Rechnung $X = 306\frac{1}{2}$.

A	396
B	217
	179
	2,
$\frac{1}{2}$(A—B	$89\frac{1}{2}$
X	$306\frac{1}{2}$

Soll man zwischen zwoen Grössen mehr als eine mittlere arithmetische Proportional-Grösse suchen: so kommt es nur darauf an, die erste davon zu finden, weil sich daraus die übrigen von selbst ergeben. Diese ist allemahl das zweyte Glied der Progreßion, wenn sie durch die mittleren Glieder vollständig gemacht ist, und es folgt nach dem ersten Gliede immer ein Glied mehr, als man mittlere Glieder sucht, weil das letzte hinzukommt.

Es sey A das erste, B das zweyte, V das letzte Glied, D die Differenz der Glieder, und man setze, daß n Glieder nach dem ersten folgen sollen: so ist $B = A + D$ und $V = A + nD$ (164. §) vorausgesetzt, daß die Progreßion wachse. Also wird $nD = V - A$, und $D = \frac{1}{n}(V - A)$ dies giebt $B = A + \frac{1}{n}(V - A)$. Hiezu D addirt giebt das dritte, und abermahl D addirt giebt das vierte, u. s. f. bis man auf V kommt. Dies giebt die Regel:

Man dividire die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl der Glieder, die nach dem ersten in der Progreßion folgen sollen, also durch eine Zahl, die um 1 grösser ist, als die Anzahl der gesuchten mittlern Grössen. Der Quotient zum ersten Gliede addirt giebt das erste der mittlern Glieder, woraus die übrigen nach dem 164 § folgen.

Wenn zwischen 4 und 25 sechs mittlere Glieder gesucht werden sollen: so giebt die neben stehende Rechnung das erste gesuchte = 7 und die sechs gesuchten Glieder sind:

7 10 13 16 19 22

V	25
A	4
V − A	21
n	7,
$\frac{1}{n}(V-A$	3
B	7

Wenn V < A ist: so muß die Progreßion abnehmen. Man dividirt also nun die Differenz dieser Grössen $A - V$ noch mit eben der Zahl, wie vorhin, und subtrahirt den Quotienten vom ersten Gliede A, um das zweyte Glied der Progreßion, oder das erste gesuchte mittlere zu erhalten.

Denn es ist nun $B = A - D$ und $V = A - nD$ (164 §.). Also $nD + V = A$, und $nD = A - V$, folglich $D = \frac{1}{n}(A - V)$ und $B = A - \frac{1}{n}(A - V)$.

Soll

Soll man zwischen 413 und 341 sieben mittlere Zahlen suchen: so giebt die beygefügte Berechnung die erste gesuchte = 404 und alle sieben gesuchte sind:

404 395 386 377 368 359 350.

A	413
V	341
	8) 72
$\frac{1}{n}(A-V)$	9
B	404

166 §.

Man kann ein Paar Zahlen, und überhaupt ein Paar Grössen, von welcher Art sie auch seyn mögen, noch auf eine andre Art, als vorhin geschehen ist, mit einander vergleichen. Man kann fragen: wie groß eine Zahl gegen die andre oder überhaupt eine Grösse gegen eine andre sey, die mit ihr von einerley Art ist? Wir fragen eigentlich allemahl so, wenn wir wissen wollen, wie groß eine Sache sey, und wenn wir dabey verlangen, daß man uns die Grösse der Sache durch Worte bekannt machen solle, ohne sie selbst vorzuzeigen. Legt mir jemand die Frage vor: wie groß ist eine Elle? so muß ich ihm entweder eine Schnur, einen Stab, oder etwas dergleichen vorzeigen, das die Länge einer Elle hat; oder ich muß die Länge der Elle mit einer ihm sonst bekannten Länge vergleichen, und anzeigen, wie groß die Länge der Elle gegen diese sonst bekannte Länge sey. Antworte ich: Eine Elle sey zweene Füsse lang; so setze ich voraus, daß der Fragende die Länge eines Fusses kenne. Sonst müste er weiter fragen, wie lang ist denn ein Fuß? Frägt jemand: wie viel gilt ein Thaler? und ich antworte: 1 $\frac{1}{2}$ Gulden; so setze ich voraus, daß dem andern der Werth eines Guldens bekannt sey.

167 §.

167 §.

Diese Grösse der einen Sache gegen die andre, giebt man gewöhnlich durch eine solche Zahl an, welche ausdrückt, wie vielmahl diejenige, welche man als die bekannte Grösse annimmt, in der andern enthalten sey.

Man muß aber hiebey diese Redensart in dem allgemeinen Verstande nehmen, welcher nicht allein im 30 §; sondern auch im 106 § ist erklärt worden. Ist würklich die eine Sache in der andern genau etliche mahl als ein aliquoter Theil enthalten; so läßt sich die Grösse der einen gegen die andre durch eine ganze Zahl ausdrücken. Wenn man z. E. sagt: Eine Elle ist zweene Füße lang. Ist aber die eine in der andern nicht genau etliche mahl ganz enthalten, wohl aber ein gewisser aliquoter Theil derselben: so läßt sich die Grösse der einen gegen die andre durch einen Bruch ausdrücken, der einen gewissen aliquoten Theil der Einheit so vielmahl enthält, als ein ähnlicher aliquoter Theil der einen Sache in der andern enthalten ist. Sagt man z. E. ein Thaler ist $1\frac{1}{2}$ Gulden, oder $\frac{3}{2}$ Gulden, so ist die Hälfte der Einheit im Bruche $\frac{3}{2}$ dreymahl, eben so wie die Hälfte des Guldens im Thaler dreymahl, enthalten.

168 §.

Auf eben die Art kann man nun auch ein Paar Zahlen mit einander vergleichen. So kann man sagen, 12 sey dreymahl so groß als 4, 20 sey $3\frac{1}{3}$ mahl oder $\frac{10}{3}$ mahl so groß als 6 u. s. f. Die Grösse einer Zahl gegen eine andre, oder sonst einer Grösse B gegen eine andre A so bestimmt, daß man übersiehet, wievielmahl entweder A ganz, oder ein aliquoter Theil von A in B enthalten sey, heißt das geometrische

Ver-

Verhältniß von B gegen A. Wenn nun eine Zahl *m* ausdrückt, wie groß B gegen A sey, oder wie vielmahl B die andre A in sich enthalte: so heißt *m* der **Exponent des Verhältnisses von *B* gegen *A*.** So ist 3 des Verhältnisses 12 zu 4, und $\frac{1}{3}^{0}$ des Verhältnisses 20 zu 6 Exponent. Die alten Geometer haben allemahl das geometrische Verhältniß verstanden, wenn sie das Wort Verhältniß (ratio), allein gebrauchen, und es wird auch hier in der Folge allemahl das geometrische Verhältniß verstanden werden, wenn gleich das Beywort Geometrisch der Kürze wegen weggelassen wird.

169 §.

Die beyden Zahlen oder Grössen, welche auf diese Art mit einander verglichen werden, nennt man die Glieder des Verhältnisses, und man betrachtet eines von beyden als das vorhergehende, das andre als das nachfolgende Glied. Die Ordnung ist an sich willkührlich. Man kann fragen: wie groß B gegen A sey? man kann auch umgekehrt fragen: wie groß A gegen B sey? Wenn der Exponent *m* ausdrückt, wie vielmahl eine Zahl A in einer andern Zahl B enthalten sey; so ist $B:A=m$, oder der Exponent ist der Quotient, welcher gefunden wird, wenn man *B* mit *A* dividirt (50. 120 §). Dies ist die Ursache, weswegen man das Verhältniß von B zu A durch das zwischen beyden gesetzte Zeichen der Division (:) auf die Art bezeichnet B:A.

170 §.

Wenn eine Grösse B gegen A eben so groß ist, als eine dritte D gegen eine vierte C; oder, wenn eine Zahl B die zweyte A so viel mahl enthält, als eine dritte D die vierte C: so ist das Verhältniß B:A

eben

eben so groß als das Verhältniß D : C, und diese Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine geometrische Proportion, oder aus der im 168 §. angeführten Ursache schlechthin eine Proportion. Die Grössen B, A, D, C heissen die Glieder der Proportion, oder auch geometrische Proportional-Grössen. Das erste und dritte, imgleichen das zweyte und vierte, werden gleichnahmige Glieder genannt. Am natürlichsten bezeichnet also der Ausdruck B : A = D : C eine geometrische Proportion: denn dies deutet an, es sey das Verhältniß B : A dem Verhältniß D : C gleich.

Man kann auch so schreiben $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ (58. 123 §).

In den Schriften der Ausländer wird diese Proportion so bezeichnet B. A : : D. C.

171 §.

Wenn die Buchstaben B, A, D, C, Zahlen bedeuten; so ist es einerley, ob man schreibt B : A = D : C, oder ob man die Ordnung der gleichnahmigen Glieder umkehrt, und sie so setzet: A : B = C : D. Man siehet leicht, daß eines eine Folge vom andern sey.

Denn ist $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$: so ist $1 : \frac{B}{A} = 1 : \frac{D}{C}$

(115 §), oder $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (113 §), das ist aber eben so viel, als A : B = C : D. Hier in der Rechenkunst wird die Voraussetzung beybehalten werden, daß die Buchstaben allemahl Zahlen bezeichnen.

172 §.

Weil der Exponent des Verhältnisses B : A mit dem Quotienten $\frac{B}{A}$, und der Exponent des Verhältnisses

nisses D : C mit dem Quotienten $\frac{D}{C}$ einerley ist, so erhellet daraus die Richtigkeit folgender Sätze:

Wenn zwey Verhältnisse gleiche Exponenten haben, so sind sie gleich groß.

Umgekehrt: Gleiche Verhältnisse haben gleiche Exponenten.

Ist $\frac{B}{A} = m$, so muß auch $\frac{D}{C} = m$ seyn, wenn die Proportion B : A = D : C richtig seyn soll. Weil also $B = mA$, und $D = mC$ wird (43. 112 §), so läßt sich jede geometrische Proportion allgemein so ausdrücken: $mA : A = mC : C$, oder auch $A : mA = C : mC$ (171 §). Der Buchstab m kan hier sowohl eine ganze Zahl, als auch einen Bruch bedeuten.

173 §.

Wenn man die beyden Glieder eines Verhältnisses $A : B$, mit einerley Zahl N multiplicirt, oder dividirt; so bleibt das Verhältniß der Producte $A.N : B.N.$, oder der Quotienten $\frac{A}{N} : \frac{B}{N}$ mit dem vorigen $A : B$ einerley.

Beweis. Denn die Quotienten $\frac{B.N.}{A.N.}$ und $\frac{B:N}{A:N.}$ sind dem Quotienten $\frac{B}{A}$ gleich (64. 123 §). Also haben die Verhältnisse $A.N : B.N$, $\frac{A}{N} : \frac{B}{N}$, $A : B$ gleiche Exponenten (169 §), und sind gleich groß.

Ist also ein Verhältniß durch zwo ganze Zahlen ausgedrückt; so kann man nach dem 85 § ihr grösstes gemeines Maaß suchen, und beyde damit dividiren: auf solche Art wird das Verhältniß durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Man kann aber jedes Verhältniß zwoer Zahlen gegen einander durch zwo ganze Zahlen ausdrücken. Denn wenn die Glieder des Verhältnisses Brüche sind, so darf man nur beyde mit dem Product beyder Nenner multipliciren. So ist $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=3\times 8:7\times 5=24:35$, und $9:\frac{7}{8}=9\times 8:7=72:7$. Daß sich eben dies auch auf gebrochne Brüche erstrecke, erhellet aus dem 123 §.

Wenn demnach gleiche Zahlen mit ungleichen Zahlen dividirt werden, so verhalten sich die Quotienten umgekehrt, wie die Divisores. Es ist nemlich $\frac{A}{m}:\frac{A}{n}=An:Am=n:m$.

174 §.

Wenn man die Glieder zwoer Proportionen in der Ordnung, wie sie folgen, durch einander multiplicirt, oder dividirt: so sind die Producte, oder Quotienten einander proportional.

Beweis. Man kann beyde Proportionen allgemein so ausdrücken:

$$A:nA=B:nB$$

und $$C:mC=D:mD.$$

Nun ist $A\times C:n\times m\times A\times C=B\times D:n\times m\times B\times D$, deswegen eine richtige Proportion, weil der Exponent beyder Verhältnisse $=n\times m$ ist. Auch ist

$$\frac{A}{C}$$

$\frac{A}{C} : \frac{n}{m} \times \frac{A}{C} = \frac{B}{D} : \frac{n}{m} \times \frac{B}{D}$ deswegen eine richtige Proportion, weil beyder Verhältnisse Exponent $= \frac{n}{m}$ ist (168 §).

Der erste Satz bleibt noch richtig, wenn gleich die Glieder mehrer als zwoer Proportionen nach der Ordnung in einander multiplicirt werden, und der Beweis läßt sich leicht auf diesen Fall anwenden.

175 §.

Es sind drey Zahlen *A*, *B*, *C* gegeben, man soll zu ihnen die vierte geometrische Proportional-Zahl finden.

I. Aufl. Man dividire die zweyte B mit der ersten A, und multiplicire den Quotienten $\frac{B}{A}$ mit der dritten C: so ist das Product $\frac{B}{A} \times C$ die gesuchte Zahl.

Beweis. Es sey $\frac{B}{A} = m$, und D die gesuchte Zahl: so muß auch $\frac{D}{C} = m$ seyn (172 §). Also ist $D = mC$ oder $D = \frac{B}{A} \times C$.

II. Aufl. Man multiplicire die zweyte B und dritte C in einander, und dividire das Product mit der ersten A: so ist $\frac{B \times C}{A}$ die gesuchte Zahl.

Beweis. Diese vierte Zahl ist vermöge des geführten Beweises $= \frac{B}{A} \times C$ und $\frac{B}{A} \times C$ ist $= \frac{B \times C}{A}$ (104. 108. 116 §).

Wenn also ein Product zwoer Zahlen $B \times C$ durch eine dritte A dividirt, den Quotienten $\frac{B \times C}{A} = D$ giebt: so ist allemahl $A:B = C:D$. Denn die vierte Proportional-Zahl zu A, B, C ist $\frac{B \times C}{A}$ (175 §) also ist sie $= D$.

176 §.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion $A:B = C:D$ Zahlen sind, so kann man die beyden mittlern Glieder verwechseln, und es ist auch $A:C = B:D$ eine richtige Proportion.

Beweis. Wenn $\frac{B}{A} = m$, also auch $\frac{D}{C} = m$, mithin $B = mA$, $D = mC$ ist; so hat man $A:C = mA:mC$, (173 §) also auch $A:C = B:D$.

177 §.

In jeder Proportion ist das Product der mittlern Glieder dem Product der beyden äussern gleich.

Umgekehrt wenn zwey Producte gleich groß sind; so sind die beyden Factoren des einen Products zwischen den beyden Factoren des andern mittlere geometrische Proportional-Zahlen.

Beweis.

Beweis des 1. §. Wenn $A : B = C : D$: so ist $D = \frac{B \times C}{A}$ (175 §). Also $A \times D = B \times C$ (32. 110 §.).

Beweis des 2. §. Wenn aber $A \times D = B \times C$: so ist $D = \frac{B \times C}{A}$ (44. 119 §.). Also $A : B = C : D$. (175 §.).

178 §.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion gleich groß sind: so heißt sie eine **stetige Proportion** (continua). Setzt man in dem allgemeinen Ausdruck $A : mA = C : mC$ (172 §.). $mA = C$: so erhält man für die stetige Proportion $A : mA = mA : mmA$.

Eine Proportion von dieser Art hat demnach nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches das mittlere heißt, kommt zweymahl vor.

Das Product des mittlern Gliedes mit sich selbst ist dem Product der äussern Glieder gleich, und man findet zu zwoen Zahlen die dritte geometrische Proportional-Zahl, wenn man das Product der zweyten Zahl mit sich selbst durch die erste Zahl dividirt (175 §.).

179 §.

Wenn A und B zwo Zahlen sind: so findet man auch zu ihnen die dritte Proportional-Zahl, wenn man die zweyte B in den Quotienten $\frac{B}{A}$ multiplicirt, (175 §.) und man erhält, wie im 178 §. die drey stetigen Proportionalzahlen A, mA, mmA, wenn $\frac{B}{A}$

$\frac{B}{A} = m$ ist. Man kann nun das dritte Glied mit dem Exponenten m aufs neue multipliciren: so erhält man vier stetige geometrische Proportional-Zahlen A, mA, mmA, mmmA (quatuor continue proportionales). Da dann die zweyte und dritte die beyden mittlern stetigen Proportional-Zahlen heissen.

Es fällt leicht in die Augen, daß man auf ähnliche Art, fünf, sechs und mehr stetige Proportional-Zahlen, so viel man will, zuwege bringen könne. Man darf nur den Exponenten jedesmahl wieder in das vorige Glied multipliciren. Auf solche Art erhält man eine Reihe von Zahlen, worinn jedes Glied zum nächst vorhergehenden einerley geometrisches Verhältniß hat, und man nennt sie eine geometrische Progression. Wenn der Exponent eine ganze Zahl, oder uneigentlicher Bruch ist; so wird es eine wachsende, oder steigende Progression: eine abnehmende aber, wenn der Exponent ein eigentlicher Bruch ist.

180 §.

Ein Product zweener gleich grosser Factoren heißt die Quadrat-Zahl eines jeden dieser beyden Factoren, und ein jeder Factor heißt die Quadrat-Wurzel dieses Products. Ein Product dreyer gleich grosser Factoren in einander heißt die Cubik-Zahl, oder der Würfel eines jeden Factors, und jeder Factor die Cubik-Wurzel des Products. So ist 4 die Quadrat-Zahl von 2, und 2 die Quadrat-Wurzel aus 4. Die Cubik-Zahl von 2 ist 8, und aus 8 ist 2 die Cubik-Wurzel.

181 §.

181 §.

Man schreibt die Quadratzahl von einer gegebenen Wurzel auf folgende Art. Oben rechter Hand an der gegebenen Wurzel, z. E. 5 setzt man die Ziffer 2, etwas kleiner, als die Ziffern der Wurzel: so daß z. E. 5^2 eben so viel ist, als $5 \times 5 = 25$. Diese kleinere Ziffer 2 zeigt nämlich an, es sey ein Product zweener gleichen Factoren gemeint, wovon jeder so groß ist, als die dabey stehende Wurzel. Auf eben die Art bedeutet 5^3 die Cubikzahl von 5 oder das Product $5 \times 5 \times 5 = 125$. Die kleine Ziffer 3 drückt aus, es sey ein Product dreyer gleichen Factoren zu machen, wovon jeder so groß, als die dabey stehende Zahl seyn soll.

Auf ähnliche Art läßt sich ein jedes Product mehrer gleicher Factoren bezeichnen: so ist, z. E. 7^6 so viel als $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ u. s. f. Solche Producte heissen überhaupt **Potenzen** oder **Dignitäten** des Factors, der durch wiederholte Multiplication mit sich selbst das Product hervor bringt, und jede Potenz hat den Namen von der Anzahl ihrer gleichen Factoren. So ist 7^6 die sechste Dignität von 7.

182 §.

Umgekehrt bedeutet das Zeichen $\surd$ (welches nichts anders, als ein etwas verzogner Buchstab *r* ist) die Quadrat-Wurzel aus der Zahl, welcher man es voransetzt. So ist $\surd 4$ eben so viel als 2. Wenn man über diesem $\surd$ die Ziffer 3 setzt, etwas kleiner, als die unter dem Zeichen gesetzte: so bedeutet das Zeichen $\sqrt[3]{}$ die Cubikwurzel aus der Zahl, der man es voransetzt. Demnach ist $\sqrt[3]{8}$ so viel, als 2, $\sqrt[3]{125}$ so viel, als 5 u. s. f.

Bey den übrigen Potenzen wird dies Zeichen auf eine ähnliche Art gebraucht, welches im zweyten Theil dieses Lehrbegriffes ausführlicher wird gezeigt werden. Die gegenwärtige Untersuchung wird nur auf die Quadrat- und Cubikzahlen als die zweyte und dritte Dignität eingeschränket seyn.

183 §.

Wenn zwo Zahlen gleich sind: so sind ihre Quadrat- und Cubikzahlen gleich, auch ist die Quadrat- und Cubikzahl einer grössern Wurzel grösser, als die Quadrat- und Cubikzahl der kleinern (32. 110 §.).

Umgekehrt also müssen auch die Quadrat- und Cubik-Wurzeln aus gleichen Zahlen gleich groß, die Quadrat- und Cubik-Wurzel der grössern Zahl aber grösser seyn, als die Quadrat- und Cubik-Wurzel einer kleinern Zahl.

184 §.

Die Quadrat- und Cubikzahl einer ganzen Zahl ist ebenfalls eine ganze Zahl, und grösser als die Wurzel. Die Quadrat- und Cubikzahl einer gebrochenen Zahl ist ein Bruch, dessen Zähler und Renner die Quadrat- oder Cubikzahl des Zählers und Nenners der Wurzel ist (115 §.). Daher ist die Quadrat- und Cubikzahl eines eigentlichen Bruchs ebenfalls ein eigentlicher Bruch, und kleiner als die Wurzel (106 §.).

185 §.

Also ist die Quadrat- und Cubikwurzel aus einem Bruch ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler und Renner die Quadrat- oder Cubikwurzel vom Zähler und Nenner jenes Bruchs ist. Es sey $N = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ so

ist

ist $N^2 = \frac{a}{b}$ (184 §.) und $N = \sqrt{\frac{a}{b}}$, also $\sqrt{\frac{a}{b}}$

$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Ist $N = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$: so ist $N^3 = \frac{a}{b}$,

und $N = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, also $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

186 §.

Die Quadrat- oder Cubik-Zahl eines Products ist das Product aus den Quadrat- oder Cubik-Zahlen der Factoren. Denn ist $N = abc$; so ist $N^2 = abc\ abc = aa\ bb\ cc$ (117 §.), $= a^2b^2c^2$, und $N^3 = abc\ abc\ abc = aaa\ bbb\ ccc$, $= a^3b^3c^3$.

Also ist umgekehrt die Quadrat- oder Cubik-Wurzel eines Products ein Product aus den Quadrat- oder Cubik-Wurzeln der Factoren. Wenn $N = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ ist: so wird $N^2 = abc$, und $N = \sqrt{abc}$, also $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$. Ist aber $N = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$: so wird $N^3 = abc$ und $N = \sqrt[3]{abc}$, also $\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$.

187 §.

In einer stetigen geometrischen Proportion ist das Product der äussern Glieder der Quadratzahl des mittlern gleich (178 §.). Und wenn vier Zahlen in einer stetigen Proportion fortgehen; so ist das Product des letzten Gliedes in das Quadrat des ersten so groß, als der Würfel des ersten von den mittlern Gliedern. Wenn nämlich A, mA, m^2A, m^3A diese vier Zahlen sind (179 §.), so hat man $A^2 \times m^3A = m^3A^3 = (mA)^3$ (180 §.).

Ist das erste Glied $A = 1$, so wird bey dreyen stetigen Proportionalzahlen das letzte Glied die Quadratzahl, und bey vier Zahlen von dieser Art, das letzte Glied die Cubikzahl des zweyten. Demnach ist die Quadratwurzel aus einer Zahl zwischen der Einheit und der Quadratzahl die mittlere Proportionalzahl, und die Cubikwurzel ist die erste von zween mittlern stetigen Proportionalzahlen zwischen der Einheit und der Cubikzahl.

188 §.

Die Quadrat- und Cubikzahl eines uneigentlichen Bruchs, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt, sind ebenfalls Zahlen von dieser Art.

Beweis. Es sey der Bruch $\frac{B}{A}$ so beschaffen, wie vorausgesetzt worden, und er sey zugleich durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt. Wenn nun a, b, c - - k die einfachen Factoren sind, woraus B bestehet, und α, β, γ .... η diejenigen, woraus A zusammengesetzt ist: so kann unter den letzten Factoren keiner vorhanden seyn, der einem der ersten gleich wäre (86 §.). Nun ist $\frac{B^2}{A^2}$ die Quadratzahl, so wie $\frac{B^3}{A^3}$ die Cubikzahl des Bruchs $\frac{B}{A}$, und es enthält B^2 jeden Factor von B zweymahl, so wie B^3 jeden dieser Factoren dreymahl, und keine andre. Also kann weder im Quadrat $\frac{B^2}{A^2}$ noch in der Cubikzahl $\frac{B^3}{A^3}$

$\frac{B^3}{A^3}$ der Zähler mit dem Nenner gemeinschaftliche Factoren haben, und deßwegen können diese Brüche keine ganze Zahlen seyn (95 §.).

Wenn gleich bey diesem Beweise ist zum Grunde gesetzt worden, daß der Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt sey: so leidet dennoch dadurch die Allgemeinheit desselben nicht. Man setze, daß $\frac{B}{A} = \frac{mb}{ma}$ und m das größte gemeine Maaß von B und A sey: so ist $\frac{B^2}{A^2} = \frac{m^2b^2}{m^2a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{B^3}{A^3} = \frac{m^3b^3}{m^3a^3} = \frac{b^3}{a^3}$. Wäre demnach $\frac{B^2}{A^2}$ oder $\frac{B^3}{A^3}$ eine ganze Zahl: so wäre auch $\frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{b^3}{a^3}$ eine ganze Zahl, welches vermöge des geführten Beweises nicht seyn kann.

189 §.

Wenn die Quadrat- oder Cubikwurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist: so kann es auch keine gebrochene Zahl seyn.

Beweis. Denn man mag annehmen, daß sie ein eigentlicher, oder ein uneigentlicher Bruch sey: so wird in beyden Fällen folgen, daß das Quadrat oder der Würfel ein Bruch von eben der Art sey (184. 188. §.), welches mit der Voraussetzung nicht bestehen kann, daß es eine ganze Zahl seyn soll. Es sind also folgende Wurzeln z. E. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$

$\sqrt[3]{8}$ u. s. f. imgleichen $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$, u. s. f. weder ganze noch gebrochene Zahlen.

190 §.

Solche ganze Zahlen, deren Quadrat- oder Cubik-Wurzeln ganze Zahlen sind, heissen **vollkommene Quadrat- und Cubik-Zahlen**, die übrigen werden **unvollkommene Quadrat- oder Cubik-Zahlen** genannt.

Man kann die Grösse der Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubik-Zahlen zwar nicht ganz genau durch Zahlen ausdrücken: anstatt dessen aber kann man doch ein Paar Gränzen angeben, zwischen welchen eine solche Wurzel fallen muß. Es ist z. E. $2 < \sqrt{7}$ und $3 > \sqrt{7}$, und das sind die Gränzen dieser Wurzeln in ganzen Zahlen: allein man kann sie in Brüchen einander noch viel näher rücken. Es ist nemlich $2,6 < \sqrt{7}$, aber $2,7 > \sqrt{7}$: denn man findet $2,6^2 = 6,76$, und $2,7^2 = 7,29$. Diese Gränzen sind nur um $\frac{1}{10}$ unterschieden, da die vorigen um 1 unterschieden waren. Man findet ohne sonderliche Schwierigkeit ein Paar Gränzen die nur um $\frac{1}{100}$ unterschieden sind, wenn man es auf Versuche ankommen läßt. Es wird nemlich $2,64 < \sqrt{7}$ und $2,65 > \sqrt{7}$ befunden werden. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man also ein Paar Gränzen finden, deren Differenz von einander kleiner ist, als jedes gegebene Stück der Einheit (139 §). Die Wurzel selbst ist alsdann von jeder dieser Gränzen noch weniger unterschieden. Beträgt also der Unterscheid beyder Gränzen schon einen so kleinen Theil der Einheit, der in der Ausübung unbeträchtlich ist: so wird man jede dieser Gränzen für die Wurzel selbst nehmen können.

nen. So kann man $\sqrt{7}=2,64$, oder auch $\sqrt{7}=2,65$ nehmen, in solchen Fällen, wenn $\frac{1}{100}$ der Einheit in der Ausübung nicht mehr beträchtlich ist: denn der Fehler bey jeder Voraussetzung beträgt weniger als $\frac{1}{1000}$.

191 §.

Weil eine solche Wurzel sich nie durch einen Bruch ausdrücken läßt, man mag die Einheit in so kleine Theile, als man will theilen (189 §); so muß es gar keinen aliquoten Theil der Einheit geben, welcher zugleich ein aliquoter Theil der Wurzel wäre: da im Gegentheil ein jeder andrer Bruch aus einem aliquoten Theil der Einheit zusammengesetzt ist (53 §). Solche Zahlen, welche sich aus gar keinem aliquoten Theil der Einheit, er mag so klein genommen werden, wie man will, genau zusammen setzen lassen, heissen Irrational-Zahlen: alle übrige aber werden Rational-Zahlen genannt. Demnach sind alle Quadrat- und Cubik-Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubik-Zahlen Irrational-Zahlen.

192 §.

Zwischen zwoen gegebenen Zahlen eine, oder auch zwo mittlere stetige Proportional-Zahlen zu finden, wenn vorausgesetzt wird, daß man aus jeder gegebenen Zahl die Quadrat- und Cubik-Wurzel ausziehen könne.

Aufl. der I. Aufg. Man multiplicire beyde gegebene Zahlen ineinander, und ziehe aus dem Product die Quadrat-Wurzel: so ist diese zwischen beyden die mittlere geometrische Proportional-Zahl. Z. E. zwischen 2 und 32 ist $\sqrt{2 \times 32}=\sqrt{64}=8$ die mittlere Zahl.

Beweis.

Beweis. Wenn A, B, C, stetige Proportional-Zahlen sind, so ist $B^2 = A \times C$ (178 §). Also $B = \sqrt{A \times C}$ (183 §).

Aufl. der 2 Aufg. Man mache von der ersten Zahl die Quadratzahl, und multiplicire diese mit der zweyten Zahl; aus dem so gefundenen Product aber ziehe man die Cubik-Wurzel: so hat man die erste von zwoen mittlern stetigen Proportional-Zahlen, und ihr Quadrat durch die erste dividirt giebt die zweyte mittlere Zahl. Z. E. zwischen 2 und 128 ist die erste Zahl $= \sqrt[3]{4 \times 128} = \sqrt[3]{512} = 8$ und die zweyte $= \frac{64}{2} = 32$.

Beweis. Wenn A, B, C, D, vier stetige geometrische Proportionalzahlen sind; so hat man $A^2 D = B^3$, (187. §) also $\sqrt[3]{A^2 D} = B$. Ferner ist $C = B^2 : A$. (178 §).

Von der Auflösung der Aufgaben, wie man aus einer vorgelegten Zahl die Quadratwurzel und Cubicwurzel-finden könne, wird im zweyten Theil dieses Lehrbegriffes umständlicher Unterricht ertheilet. Dem angehenden Geometer wird die Sache desto interessanter, wenn eben bey den weiter unten folgenden Anwendungen der Rechenkunst auf die Geometrie manche andre Fälle vorkommen, bey welchen die Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln unentbehrlich ist.

Der X. Abschnitt.

Von der Regel-Detri, und ihrer Anwendung.

193 §.

Die Regel des 175 §, nach welcher man zu dreyen Zahlen die vierte geometrische Proportional-Zahl sucht, heißt die Regel-Detri, eigentlich: regula de tribus sc. numeris. Sie heißt auch die güldene Regel (regula aurea), wegen ihres überaus grossen und allgemeinen Nutzens, sowohl in der ganzen Mathematik, als auch bey solchen Rechnungsfragen, die im bürgerlichen Leben beym Handel, und allerhand Arten der Handthierung und Gewerbe vorkommen. In den sogenannten Rechen-Büchern wird die Anwendung dieser Regel auf die Rechnungsfragen der letztern Art gewöhnlicher Maaßen sehr weitläuftig gezeiget, und die Sache selbst durch mancherley Arten von Exempel erklärt. Es ist zwar eigentlich nicht die Absicht der mathematischen Rechenkunst diese Anwendung zu zeigen. Weil indessen diese Anwendung einen so mannigfaltigen Nutzen hat: so pfleget man sie in den mathematischen Lehrbüchern nicht ganz zu übergehen, zumahl da die mathematischen Theorien die Sache sehr erleichtern. So wie diese Lehre in den meisten Rechenbüchern vorgetragen wird, ist sie den Anfängern wegen der grossen Menge specieller Regeln, die nur in einzelnen Fällen brauchbar sind, schwer und unangenehm: und eben daher kommt es, daß verschiedene Jahre damit hingehen, bevor

diejenigen einiger Maaßen im Rechnen geübet werden, die keines andern Unterrichtes genieſſen. Es wäre freylich eben nicht der beſte Weg, wenn man allen jungen Leuten, die zur Handlung, zu Künſten, oder Handwerken vorbereitet werden ſollen, die Rechenkunſt ſo vortragen wollte, wie ſie in mathematiſchen Lehrbüchern abgehandelt wird. Bey einem groſſen Theil derſelben würde man damit gar nicht fortkommen, weil ſie oft kaum dazu aufgelegt ſind, nach der Erwartung ähnlicher Fälle zu ſchlieſſen, geſchweige eine lange Reihe aneinander hängender allgemeiner Wahrheiten zu überdenken. Für ſolche Lernende iſt die Anführung nach der gemeinen Art gut genug. Aber Gelehrte, und überhaupt ſolche Perſonen, die ihre Seelenkräfte mehr, als der gemeine Haufe brauchen, können auf einem weit leichtern Wege zu eben dem Ziele gelangen.

194 §.

Allemahl, wenn ein Paar Gröſſen von einer gewiſſen Art, ſich eben ſo wie ein Paar Gröſſen verhalten, die zu eben derſelben, oder auch zu einer andern Art gehören, läßt ſich dieſe Regel-Detri anwenden: es müſſen alsdenn drey von dieſen Gröſſen gegeben ſeyn, wenn die vierte geſucht wird. Demnach muß man zuförderſt wiſſen, ob zwey Gröſſen, wovon in der Aufgabe die Rede iſt, ſich wirklich ſo gegen einander verhalten, wie die dritte zur geſuchten Gröſſe, bevor man die Regeln anwenden kann. Die Verhältniſſe und Proportionen derjenigen Sachen gegen einander, womit wir bey den täglichen Geſchäften des gemeinen Lebens zu thun haben, lernt man, wenigſtens zum Theil, von Jugend auf, ſo zu ſagen, von ſelbſt kennen. Viele ſind durch Geſetze, andre

durch

durch eingeführte Gewohnheiten bestimmt, davon man nothwendig gehörig unterrichtet seyn muß, bevor man im Stande ist, irgend eine dahin gehörige Rechnungs-Aufgabe aufzulösen. Die vornehmsten hieher gehörigen Fälle, welche bey den im gemeinen Leben üblichen Rechnungs-Fragen am meisten vorkommen, sollen nun nacheinander auf gewisse Grundregeln gebracht, und jede derselben mit einigen dahin gehörigen Exempeln erläutert werden.

195 §.

Zuförderst gehören hieher alle die Fälle, da man eine genannte Zahl auf einen andern Nahmen bringen soll, davon die gemeinsten und leichtesten bereits im 146-148 § vorgekommen sind. Die Fälle von dieser Art liessen sich da auflösen, ohne die Sache eben so allgemein zu betrachten, wie hier geschehen kann. Wenn aber überhaupt eine gewisse Menge von Einheiten der einen Benennung so viel ausmacht, als eine andre Menge Einheiten von andrer Benennung: so sieht man leicht, daß die doppelte Anzahl der ersten Art so viel ausmache, als die doppelte Anzahl der andern, und die dreyfache Anzahl der ersten so viel, als die dreyfache Anzahl der andern u. s. f. Wenn 3 Gulden 2 Thaler werth sind, so sind 2 mahl 3 Gulden auch 2 mahl 2 Thaler werth. Will man also wissen, wieviel 194 Gulden werth sind; so kann man ansetzen 3 Fl: 194 Fl. = 2 Thaler zum Werth von 194 Fl. in Thalern ausgedrückt. Dies ist der Grund aller Reductionen der mancherley Maaße, Gewichte, und Münzen, auf andre, wenn man es weiß, wieviel von der einen Art eine gewisse Menge der andern ausmacht.

Exempel.

Wenn 1 ½ Kayser-Gulden einen Thaler, oder 3 Gulden zwey Thaler machen, wie viele Thaler machen 194 Kayserfl:?

3 Kayserfl: 194 Fl. = 2 Thl: vierten Zahl, diese ist = 129 ⅓ Thl.

Wenn 14400 Rheinl. Fuß so viel machen, als 13913 Pariser Fuß, wie viel Rheinl. Fuß machen 328 Pariser Fuß?

13913 P. F: 328 P. F: = 14400 R. F: vierten Zahl.

Also die gesuchte Zahl = $\frac{328 \cdot 14400}{13913}$ R. F: = 339, 48 Rheinl. Fuß.

196 §.

Unter den dreyen gegebenen Zahlen müssen zwey seyn, die einerley Nahmen haben, oder doch auf einerley Nahmen gebracht werden können: die dritte von den gegebenen Zahlen muß mit der gesuchten von einerley Art seyn. Eine von den beyden ersten Zahlen ist gewöhnlich mit der gesuchten Zahl vermittelst der Frage: wieviel? oder sonst eines ähnlichen Fragwortes verbunden, und diese kann kurz die Fragzahl des Exempels heissen. Beym Ansatz müste nun eigentlich die Fragzahl in die Mitte, was mit ihr von einerley Art ist voran, was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die dritte Stelle gesetzt werden. Man kann aber auch das Exempel so niederschreiben, wie es beym gewöhnlichen Ausdruck lautet: alsdenn kommt die Fragzahl in die dritte Stelle, was mit ihr von einerley Art ist, voran, und was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die Mitte. Uebrigens bleibt die Regel: daß man das Product der beyden letzten Zahlen mit

der

der ersten dividiren müsse. Man siehet leicht, daß dies das gesuchte Resultat nicht ändre, weil man in einer Proportion die beyden mittlern Glieder verwechseln kann (176 §), wenn entweder alle Glieder von einerley Art sind, oder als abstracte Zahlen betrachtet werden können. Dies letztere kann hier während der Rechnung geschehen, indem man blos die Grösse der vierten Zahl sucht; nur muß man bemerken, daß die gesuchte Zahl nun allemahl mit derjenigen Zahl unter einerley Nahmen gefunden werde, welche ihre Stelle in der Mitte erhält.

197 §.

Die Zahl, welche angiebt, wieviele Münzen, Maasse oder Gewichte, unter der einen Benennung Eins unter einem andern Nahmen ausmachen, nenne man die **Reductionszahl**. Wenn diese ein Bruch ist, so läßt sich daraus unmittelbar der Reductionssatz folgern, welcher ausdrückt, wieviel Stücke man unter jedem Nahmen nehmen muß, um an Werth gleichviel zu erhalten. Wenn 1 Fl $= \frac{2}{3}$ Thl. ist; so folgt daraus, daß 3 Fl. = 2 Thl. sind. Eben dieser Reductionssatz giebt das Verhältniß zweyer an sich gleichartiger Grössen an, die nur verschiedene Nahmen führen. Weiß man, daß 3 Fl. = 2 Thl. sind, so folgt daraus, es sey Fl : Thl. = 2 : 3. Umgekehrt, wenn das Verhältniß der einen Grösse gegen die andre in Zahlen gegeben ist; so folgt daraus der Reductionssatz: aus der Proportion Fl : Thl. = 2 : 3 folgt 3 Fl : = 2 Thl. Weil niemand die Reductionszahl, oder den Reductionssatz wissen kann, wenn es darauf ankommt, die in verschiedenen Ländern so sehr verschiedene Maasse und Gewichte zu vergleichen, so hat man Vergleichungstafeln nöthig, welche diese Zah-

len ein für allemahl angeben. Einer der vornehmsten hieher gehörigen Schriftsteller ist Jürgen Elert Kruse im 1sten Theil seines allgemeinen und besonders Hamburgischen Contoristen. Hamburg 1766. Ferner gehört hieher *Io. Casp. Eisenschmidii* de ponderibus et mensuris veterum Romanorum, Graecorum, Hebraeorum, nec non de valore pecuniae veteris disquisitio. Argentorati 1737. Die Zahlen in der nachstehenden Tafel sind sonst aus Krusens Contoristen, die mit dem Sternchen bezeichneten aber aus dem Eisenschmidtschen Werke genommen. Die Krusischen Zahlen sind zum Theil nach neuern Angaben berichtiget, welche unter andern auch Herr Prof. Joh. Tob. Mayer in seinem Unterricht zur practischen Geometrie Gött. 1777, im 1sten Theil 14. §. 52. Seite, mitgetheilt hat. Bey dem Pariser, oder Königl. französischen Fußmaasse, dessen Länge in der Vergleichungstafel als bekannt zum Grunde gesetzt wird, ist die Eintheilung des Fusses in 12 Zoll, des Zolles in 12 Linien, wie beym Rheinländischen Maasse gewöhnlich: nur wird die Linie nicht wie beym Rheinländischen Längemaasse in 12 Scrupel, sondern in 10 sogenannte Puncte, also ein Pariser Fuß in 1440 Puncte getheilt, und in solchen Puncten des Pariser Fusses ist die Länge eines jeden andern in der Tabelle angeführten Fusses angegeben. Wenn also beym Rheinländischen Fuß die Zahl 1391,3 steht, so will das sagen, der Rheinländische Fuß sey 1391,3 Puncte des französischen Fusses lang.

Tafel zur Vergleichung der Fußmaasse.

Aachen	1285	
Amsterdam	1255	
Anspach	1320	
Antwerpen	1266	
Augspurg	1282 $\frac{1}{2}\frac{8}{3}$*	nach Eisenschmidt
Augsb. Landschuh	1309*	Math. Atlas.
	1312,9	nach Tob. Mayers der
Basel	1322	Wiss. II. B. 360 S.
Bayern	1293,8	Abh. der Churb. Acad.
Berlin	1373	
Bern	1300	
Bologna	1682 $\frac{2}{3}$*	
Braunschweig	1265	
Bremen	1282	
Breslau	1260	
Brüssel	1290	
Calenberg	1296	
Carlsruhe	1241	
Cleve	1310	
Cöln	1220	
Constantinopel	3140	
Der ältere Dän. F.	1403 $\frac{2}{5}$*	Eisenschmidt p. 96.
Der jetzige Dän. F.	1391,3	Leipz. Samml. IV. B.
Danzig	1271,5*	46. St. n. V. 958.
Dresden	1255	u. f. S.
Emden	1313	
Erfurt	1251	
Florenz Bracci	2580*	Eisenschmidt p. 96.
	2584,5	De la Lande Astr.
Frankf. am Mayn	1270	§. 2639.
Geneve	2163	

Gieſſen	1320	
Gotha	1275	
Halle	1320	
Hamburg	1270	
Hannover	1290	
Hollſtein	1323	
Königsberg	1364	
Leiden	1390	
Leipz. gem. Fuß	1251	
Baufuß	1253	
London	1351,67	Hiſt. de l'Acad. de Paris A. 1738. p. 193.
Lübeck	1290	
Mecklenburg	1290	
Nürnberg	1346¾*	
Paris Königl. Fuß	1440	
6 machen 1 Toiſe		
Pommern	1295	
Prag	1338	
Rheinländiſcher	1391,3*	
Riga	1215	
Römiſcher Palme	990,3	
Alter Röm. Fuß	1309	Mem. de l'Acad. de Paris A. 1757.
Roſtock	1282	
Schweden	1316½*	
	1315,9	Celſius Schwed. Abh. 1740. p. 255.
Schweiz	1330	
Spanien	1253	
Strasburg	1282¾	
Stettin	1253	
Turin Pié de Eliprando	2273	d'Antoni Grundſ. d. Art. 239 S. der Ueberſ.
Ulm	1281	
Venedig	1540*	

Wien

Wien	1401,2	Liesgänig Dimens.
Zürch	1330	grad. p. 18.

Den schon angeführten Gründen gemäß verhalten sich die in dieser Tafel aufgeführten Zahlen gegen einander, wie die daneben stehenden Fußmaasse: also erhält man für zwey dergleichen Fußmaasse den Reductionssatz, wenn man in der Proportion, welche die Tabelle zwischen zweyen Fußmaassen und den daneben stehenden Zahlen angiebt, die beyden mittlern und äussern Glieder mit einander multiplicirt. Es ist nemlich vermöge der Tabelle 1 Fuß in Halle: 1 Fuß in Leipzig = 1320 : 1251, also 1251 Fuß in Halle = 1320 Fuß in Leipzig, oder 417 Fuß in Halle = 440 Fuß in Leipzig. Daraus findet man auch die Reductionszahl

1 Fuß in Halle = $\frac{4}{4}\frac{4}{1}\frac{0}{7}$ Fuß in Leipzig
1 Fuß in Leipzig = $\frac{4}{4}\frac{1}{2}\frac{7}{0}$ Fuß in Halle.

198 §.

Das Handlungsgewicht, welches bey solchen Waaren gebraucht wird, die eben nicht im hohen Preise stehen, ist an den meisten Orten vom Gold- Silber- und Edelsteinen-Gewicht, auch vom Apothekergewicht unterschieden. Ein Pfund Handlungsgewicht wird in 32 Loth, ein Loth in 4 Quentchen, ein Quentchen in 4 Pfenniggewichte getheilt. Beym Golde und Silber bedient man sich fast in ganz Deutschland des Cöllnischen Markgewichts, wovon eine Mark $\frac{1}{2}$ Pfund Cöllnisch wiegt. Beym Silber wird diese Mark in 16 Loth oder 8 Unzen, ein Loth in 4 Quentchen, 1 Quentchen in 4 Pfenniggewichte: also eine Mark in 256 Pfenniggewichte getheilt. Ein solches Pfenniggewicht theilt man noch

in 15 Gran, mithin die Unze in 480 Gran, die Mark in 3840 und das Pfund Cöllnisch in 7680 Gran. Beym Münzwesen wird eben dies Pfenniggewicht in 256 kleinere gleiche Theile getheilt, die Richtpfenningstheile heissen: also wiegt eine Mark Cöllnisch 65536 Richtpfenningstheile, eine Unze Cöllnisch wiegt 8192, ein Loth 4096, ein Quentchen 1024, ein Gran aber $17\frac{1}{15}$ solcher Richtpfenningstheile. Auch wird der Pfenning in 2 Heller getheilt, und 1 Heller wiegt 128 Richtpfenningstheile.

Beym Münzwesen wird 1 Loth auch in 18 Grän getheilt, und 1 Grän wiegt $227\frac{5}{9}$ Richtpfennigstheile. Vermuthlich rührt diese Eintheilung daher, weil man bey Golde die Mark in 24 Karat, und 1 Karat in 12 Grän theilt: alsdenn wiegt 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Karat, und die Unze 3 Karat, oder 36 Grän, mithin die ganze Mark 288 Grän, und 1 Karat wiegt $2730\frac{1}{3}$ Richtpfenningstheile. Ueberdem braucht man bey goldenen Münzen auch die so genannten Ducaten-Aeßchen. Ein Pfenninggewicht wiegt 17 Aeßchen, also 1 Quentchen 68 Aeßchen, 1 Loth 272 Aeßchen, 1 Unze 544 Aeßchen, 1 Mark 4352 Aeßchen.

199 §.

In Holland, Engelland, Frankreich, und mehrern andern Orten ist beym Golde, Silber und Edelsteinen das so genannte Troygewicht üblich, welches jedoch nicht an allen diesen Orten gleich ist. Ein Pfund Holländisch Troygewicht hat eigentlich 12 Unzen, ob man gleich in Holland wohl 16 Unzen darauf rechnet; hievon betragen 8 Unzen 1 Mark Troy, und 1 Pfund wiegt $1\frac{1}{2}$ Mark. Weiter wird

die

die Unze in 20 Engels, und 1 Engel in 32 Aß, oder statt dessen in 24 Gran getheilt; daher machen 3 Gran soviel als 4 Aß, und 1 Mark wiegt 5120 Aß, oder 3840 Gran, eine Unze 640 Aß, oder 480 Gran. Bey Perlen und Edelsteinen wird die Unze in 150 Karate getheilt.

Die Cöllnische Unze wiegt 19 solcher Engels, wovon 20 eine Unze Holländisch Troy wiegen. (M. s. Eisenschmidt a. a. O. pag. 10.) also ist 1 Cölln. Unze: 1 Unze Holl. Troy = 19:20, und 19 Unzen Holl. Troy sind = 20 Unz. Cöllnisch: mithin auch 19 Mark Holl. Troy = 20 Mark Cöllnisch. Diesemnach wiegt die Cöllnische Unze $\frac{1}{2}\frac{9}{0}$ 640 = 19.32 = 608 Aß Holl. Troy, und 1 Cöllnisches Pfenninggewicht von 15 Gran Cöllnisch, oder 17 Ducaten-Aeßchen wiegt $\frac{6}{1}\frac{0}{2}\frac{8}{}$ = 19 Aß Holl. Troy.

Ein Pfund Englisch Troygewicht wird eingetheilt in 12 Unzen, oder 1½ Mark, die Unze in 20 Pennys, 1 Penny in 24 Grane: also 1 Mark von 8 Unzen in 3840 Grane, und 1 Unze wiege 480 Gran. Ausser diesem Troygewicht wird in Engelland ein andres Gewicht bey der übrigen Handlung gebraucht, welches Avoir du pois heißt, und leichter als Troygewicht ist. Ausserdem wird daselbst auch das so genannte Königsgewicht bey einigen Waaren gebraucht, und 1½ Pfund Avoir du pois sind 1 Pfund Königsgewicht.

Auf ein Apotheker Pfund werden 12 Unzen gerechnet, wie auf 1 Pfund Troygewicht, die Unze wird in 8 Drachmen oder Quentchen, 1 Drachma in 3 Scrupel, 1 Scrupel in 20 Gran, also die Unze in 24 Scrupel oder 480 Gran getheilt.

In Frankreich ist beym Golde und Silber ebenfalls ein so genanntes Markgewicht von 8 Unzen üblich: die Unze davon wird bis auf Scrupel wie das Apothekergewicht eingetheilt, nemlich in 8 Gros oder Drachmes, und 1 Gros in 3 Deniers oder Scrupules. Dagegen wird 1 Denier oder Scrupel nicht in 20 Gran, wie beym Apothekergewicht, sondern 24 Grains getheilt; also wiegt die Pariser Unze 576 Grains, und die Pariser Mark wiegt 4608 Grains. Das Pariser Apothekergewicht ist sonst mit dem dortigen Silbergewicht einerley, nur wird beym medicinischen Gebrauch die Unze in 480 Gran getheilt. Die deutsche Apotheker-Unze ist fast grade so schwer, als die Venetianische Unze: 1 Loth Cöllnisch wiegt 235 Gran im deutschen Apothekergewicht.

200 §.

H. v. Clausberg (dem. Rechenk. 1102. 1103. S.) giebt das Cöllnische Pfund eben so schwer als das Leipziger Pfund an: nach H. Kruse aber ist das Leipziger Pfund 12 Aß Holl. Troygewicht leichter, als das Cöllnische Pfund; das Leipziger Pfund wiegt 9716 Aß, das Cöllnische Pfund aber 9728 Aß. H. Reinthaler in Leipzig hat mich davon versichert, daß Kruse recht habe. Die nachstehende Vergleichungstafel giebt die darin aufgeführten Gewichte nach von Clausberg in Granen des Leipziger Pfundes, und nach Kruse in Assen des Holländischen Troygewichtes an.

Tafel zur Vergleichung der Gewichte.

	in Granen.	in Assen.
1 Pf. in Amsterdam wiegt	8152	10280
Antwerpen	7710	9790
Archangel	6705	8512
Aachen	7710	9754
Augsburg groß Gew.	8088	10220
klein Gew.	7776	9836
Bologna	5958	7537
Botzen	8241	10426
Brüssel	7710	9790
Breslau	6667	8434
Braunschweig	7680	9716
Berlin	7697	9750
Bremen	8100	10380
Baußen	7130	9020
Bourdeaux	8085	10228
Constantinopel	20865	26396
Cracau	6660	8426
Cadix	7560	9592
Cölln am Rhein	7680	9728
Copenhagen	7716	10388
Danzig	7163	9062
Florenz	5581	7273
Frankfurt am Mayn	7683	9720
Genua	5208	7140 schw. Gew. 6720 leicht Gew.
Genf	9075	11462 groß Gew. 9552 klein Gew.
Hamburg	7980	10080
Königsberg alt Gew.	6255	7913
neu Gew.	7695	9750

	in Granen.	in Assen.
1 Pf. in London wiegt	7434	9439 Av. du pois 14158 Königsg.
Lissabon	7552	9552
Livorno	5605	7131
Lucca	5488	7746
Lion	6885	8840
Lübeck	7950	10059
Lüneburg	8000	10127
Lindau	7555	9558
Malaga	7560	9592
Marseille	6803	8359
München	9225	11671
Memmingen	8422	10655
Magdeburg	7695	9750
Neapolis	6983	6677
Nürnberg	8385	10608
Paris	8065	10188
Petersburg	6723	8512
Prag	8450	10690
Rom	5581	7345
Riga	6878	8701
Regensburg	9225	11671
St. Gallen groß Gew.	9615	12164
klein Gew.	7650	9678
Strasburg	7755	10188 schw. Gew. 9811 leicht Gew.
Schaffhausen	7560	9564
Salzburg	9210	11656
Ulm	7710	9754
Venedig gr. Gew.	7845	9955
klein Gew.	4959	6300

	in Granen.	in Assen.
1 Pf. in Verona g. G. wiegt	8180	10350
klein Gew.	5448	6924
Wien	9240	11690
Warschau klein Gew.	6215	7863
Zürch	8693	10972 schw. Gew. / 9753 leicht Gew.
Zittau	7695	9735

Wenn die Frage vorgelegt wäre: 539 Pariser Pfunde, wieviel sind es Londner Pfunde; so würde man nach dieser Tafel ansetzen:

7434 Par. Pf. — 8065 Londn. Pf.
— 539 Par. Pf.?

Antw. 584 Pf. 24 Lt. Londner.

201 §.

Beym Kauf und Verkauf verhält sich die Menge von einerley Waare, die man nach Maaß und Gewicht bestimmt, wie der dafür zu zahlende Preis. Weiß man demnach, wie viel eine gewisse Menge dieser Waare kostet: so läßt sich für jede andre Menge der Preis, und für jeden andern gegebenen Preis die zugehörige Menge der Waare berechnen.

Wenn ein Centner einer gewissen Waare 136 Rthl. kostet, und man frägt, wie viel kostet ein Liespfund: so ist die Proportion diese:

1 Cent: 1 Lpf. = 136 Rthl: vierten Zahl, oder nach gemeiner Art angesetzt:

1 Cent. — 136 Rthl. wie viel 1 Lpf.?

Wenn 1 Cent. = 110 Pf. und ein Lpf. = 14 Pf.:

so ist die gesuchte Zahl $= \frac{136 \times 14}{110}$ Rthl.

Umge-

Umgekehrt, wenn ein Centner Waare 136 Rthl. kostet, und man frägt, wieviel man von eben der Waare für 100 Rthl. erhalten wird: so hat man:

136:100 = 110; $\frac{1}{136}$ Pf.

202 §.

Bey zinsbarer Verleihung der Capitalien sind die von ungleichen Capitalien in gleicher Zeit zu zahlenden Zinsen den Capitalien, bey einerley Capital aber, und ungleicher Zeit, dieser Zeit proportional.

Wenn also jährlich 5 von 100 bezahlt wird, und man frägt, wie viel Zinsen von 1418 Rthl. jährlich zu zahlen sind? so hat man 100 Rthl: 1418 Rthl. =

5 Rthl: $\frac{1418 \times 5}{100}$ Rthl. Und wenn von 1000 Rthl. die jährlich 50 R. Zins tragen, nach 7 Jahr 5 Monath die restirenden Zinsen zu bezahlen sind: so ergiebt sich der Belauf durch die Proportion.

1 Jahr: $7\frac{5}{12}$ Jahr = 50 Rthl: $50 \times 7\frac{5}{12}$ Thl. = $370\frac{5}{6}$ Thl.

Dies ist der Grund der ganzen so genannten Zinsrechnung, davon man bey den practischen Schriftstellern eine Menge von Exempeln zur Erläuterung und Uebung nachschlagen kann.

Will man nicht die Zinsen allein, sondern die Summe von Capital und Zins haben; so läßt sich das erste Exempel so setzen:

100 Rthl: 105 = 1418: $\frac{1418 \times 105}{100}$ rthl.

Beym zweyten Exempel muß man zuförderst berechnen, daß $137\frac{1}{12}$ Thl. aus 100 Thl. in $7\frac{5}{12}$ Jahr werden. Hierauf kann man ansetzen

100 Thl:

100 Thl: $137\frac{1}{12}$ Thl. = 1000 Thl. : $137\frac{1}{12} \times 10 =$ $1370\frac{5}{6}$ Thl.

203 §.

Der Lohn, den ein Arbeiter verdient, verhält sich entweder wie die Zeit, die der Arbeiter dabey zubringt, oder zuweilen wie die Grösse der verrichteten Arbeit selbst.

Es hat gleiche Bewandniß mit dem Zins eines vermietheten Hauses, Landgutes, oder einer andern Sache.

Je mehr ein Arbeiter zu thun hat, desto längere Zeit wird er darauf zubringen, und die verrichtete Arbeit wird sich wie die Zeit verhalten, vorausgesetzt, daß er immer gleich fleißig arbeite.

Nimmt man mehr Arbeiter, so wird in eben der Zeit mehr zu Stande kommen. Wenn alle Arbeiter gleich fleißig sind: so wird die verrichtete Arbeit der Anzahl der Arbeiter proportional seyn.

Wenn also z. E. 16 Knechte in einem Tage 50 Fuder Erde etwa bey Abtragung eines Berges fortschaffen können, und man frägt, wie viel Leute erfodert werden, wenn in einem Tage 738 Fuder weggeschaft werden sollen; so ist die Antwort:

$$50 \text{ Fuder} : 738 \text{ Fuder} = 16 \text{ Knechte} : \frac{738 \times 16}{50}$$

$= 236$ bis 237 Knechte.

Es hat nicht die geringste Schwierigkeit sich selbst so viele Exempel, als man will, zur Uebung aufzusetzen, wobey die eine, oder die andre dieser Regeln angebracht werden kann. Viele solche Exempel würden hier den Vortrag unnöthig weitläuftig machen,

und

und man kann eine ziemliche Menge derselben bey einem jeden practischen Schriftsteller finden.

204 §.

Da man durch die Zins-Rechnung finden kann, wie viel grösser ein Capital nach einer gewissen Zeit durch die hinzukommende Zinse geworden ist (202 §); so läßt sich auch umgekehrt berechnen, wie viel kleiner ein durch Zinsen schon vermehrtes Capital vor einer gewissen Zeit gewesen sey. Giebt man 5 pc. jährliche Zinse, so kann man sagen: aus 100 Rthl. werden in einem Jahe 105 Rthl., in 2 Jahren 110 rthl., in 3 Jahren 115 rthl. u. s. f. Also auch umgekehrt: 105 Thl. waren vor einem Jahr 100 rthl, 110 Thl. waren vor 2 Jahren 100 rthl. und 115 thl. waren vor 3 Jahren 100 u. s. f. Dies ist der Grund der so genannten Rabatt oder Interusurien-Rechnung.

Man setze, einer ist dem andern 1500 thl. nach 3 Jahren zu zahlen schuldig, und bezahlt sie gleich: wie viel muß er wegen des Vortheils abrechnen, den der Creditor wegen der frühern Bezahlung hat? Dies läßt sich so berechnen.

115 thl. waren 100 thl. wie viel 1500 thl. vor 3 Jahren?

Die Antwort ist: $\frac{150000}{115} = 1304\frac{40}{115}$ Thaler.

Dies abgezogen von 1500 giebt das Interusurium $195\frac{75}{115}$ thl.

Es ist dies eigentlich die gemeine Art das Interusurium zu suchen: zu Berechnung des zusammengesetzten Interusurii wird in der Folge besondere Anleitung

leitung gegeben werden. (M. s. im zweyten Theil den XIII. Abschnitt der Rechenkunst.)

205 §.

Die Gesellschaftsrechnung führt daher den Nahmen, weil sie häufig gebraucht wird, wenn eine Summe Geldes, oder etwas dergleichen, dessen Werth sich schätzen läßt, unter mehr Personen ungleich vertheilt werden soll. Bey Compagnie-Handlungen, Concursen, Erbtheilungen, Havereyen u. s. f. findet diese Rechnung, so wie in sehr vielen ähnlichen Fällen, ihre Anwendung, daher sie auch zuweilen die Vermischungs-Rechnung heißt, wenn von einer Sache, die aus verschiedenen Ingredientien besteht, z. E. Schießpulver, Arzneyen u. dgl. eine gewisse Menge verfertiget werden soll, und gefragt wird, wie viel von jeder Art der Bestandtheile erfodert werde. In allen solchen Fällen müssen soviele Zahlen gegeben seyn, als man Theile finden soll, und diese gegebenen Zahlen müssen sich so gegen einander verhalten, wie sich die gesuchten Theile gegen einander verhalten sollen.

Gesetzt vier Personen A, B, C, D, legen zu einer Handlung folgende Summen, 9600 thl, 6000 thl, 4800 thl, 3600 thl. Diese gewinnen zusammen 5000 rthl, und die Frage ist, wie viel gehöret einem jeden nach Proportion seiner Einlage? Man muß die Zahl 5000 in 4 Theile eintheilen, die sich wie die Zahlen, 9600, 6000, 4800, 3600, oder 96, 60, 48, 36; oder auch 8, 5, 4, 3 verhalten (173 §). Die Summe der letzten vier Zahlen ist 20. Also mache man folgende vier Proportionen:

$$20:8=5000:\frac{8\times 5000}{20}=2000 \text{ thl. dem A.}$$

$$20:5=5000:\frac{5\times 5000}{20}=1250 \text{ thl. dem B.}$$

$$20:4=5000:\frac{4\times 5000}{20}=1000 \text{ thl. dem C.}$$

$$20:3=5000:\frac{3\times 5000}{20}=750 \text{ thl. dem D.}$$

Summe 5000 rthl.

Um den Grund dieses Verfahrens allgemein einzusehen, nehme man an, daß S die Summe sey, welche man in drey ungleiche Theile eintheilen soll, die sich wie die Zahlen p, q, r, gegen einander verhalten. Man nehme ferner an, daß P, Q, R, die gesuchten Theile sind, und setze $p+q+r=s$. Vermöge der gegebenen Regel setzt man an:

$$s:p=S:\frac{p}{s}S,$$

$$s:q=S:\frac{q}{s}S,$$

$$s:r=S:\frac{r}{s}S,$$

und nimmt $\frac{p}{s}S=P$, $\frac{q}{s}S=Q$, $\frac{r}{s}S=R$ an.

Alsdenn ist $P+Q+R=\frac{p+q+r}{s}S=S$, und $P:Q=p:q$, so wie $Q:R=q:r$, wie erfordert wird.

206 §.

206 §.

Bey den bisherigen Fällen, wo sich die Regel Detri anwenden läßt, sind die gleichnahmigen Glieder der Proportion, wenn sie gehörig geordnet ist, allemahl in einer ähnlichen Verbindung, als z. E. Waare und Preis, Capital und Zins, Arbeit und Zeit, Anzahl der Arbeiter und Grösse der Arbeit, u. s. f. Man kann hier allemahl sagen, je grösser oder kleiner das eine dieser Dinge ist, desto grösser oder kleiner muß das andre seyn. Z. E. je mehr Waare, desto mehr Geld; je grösser Capital, desto mehr Zins u. s. f. Allein es sind nicht allemahl zwo Grössen zwoen andern Grössen, auf welche sie sonst eine ähnliche Beziehung haben, in einerley Ordnung, sondern zuweilen in umgekehrter Ordnung proportional.

Einerley Arbeit kann in kürzerer Zeit zu Stande kommen, wenn mehr Personen Hand anlegen: doppelt so viel Arbeiter bringen sie in halb so vieler Zeit zu Stande. Ueberhaupt ist die Menge der Arbeiter der Zeit umgekehrt proportional, worin sie einerley Arbeit zu Stande bringen.

Wenn also 120 Soldaten mit einem gewissen Festungsbau innerhalb 9 Monathen fertig werden, und der Bau soll in 3 Monathen zu Stande seyn; so erhellet, daß man dreymahl mehr Leute haben müsse, weil man im dritten Theil der Zeit fertig seyn will. Man siehet leicht, daß dieser, und ähnliche Fälle von dieser Art ebenfalls zur Regel Detri gehören, weil man drey Zahlen weis, und die vierte gesucht werden soll. Wer es deutlich einsiehet, was es mit der Regel Detri für eine Beschaffenheit habe, der braucht hier keine neue Regeln, weil er von selbst die drey gegebenen Zahlen mit der gesuchten in eine rich-

tige Proportion bringen wird. Das angeführte Exempel würde man so ansetzen müssen:

3 Monath : 9 Monath = 120 Sold : $\frac{9}{3} \times 120$ Sold. Wer ohne Theorie ein Exempel der Regel Detri nach gemeiner Art anzusetzen gelernt hat, wird es hier leichter versehen können. Wollte man eben dasselbe Exempel so ansetzen:

9 Mon. geben 120 Sold. wie viel, 3 Mon.? so erhellet, daß eine dreymahl kleinere Anzahl würde gefunden werden, da sie doch dreymahl grösser seyn muß. Bey der gemeinen Art des Ansatzes bedarf man der neuen Regel: daß die Fragzahl nicht die dritte, sondern die erste im Ansatz seyn, und dagegen die erste Zahl in die dritte Stelle gesetzt werden müsse.

Der Ansatz des vorigen Exempels würde also dieser seyn:

Wie viel 3 Mon.? wenn 120 Soldaten 9 Monath geben: und man kann sich die Sache so vorstellen, daß die Glieder zwar eben so, wie sonst nach der Reihe, aber von der Rechten gegen die Linke zu in umgekehrter Ordnung, geschrieben werden müssen. Dann bleibt die Rechnungs-Regel selbst ungeändert: man muß das Product der beyden letzten Zahlen durch die erste dividiren. Dies hat man die verkehrte Regel Detri genannt, und sie von der ordentlichen Regel Detri unterschieden. An sich wäre es nicht nöthig gewesen, diesen Unterschied zu machen, denn es ist einerley Regel auf die gegebenen Zahlen so angewandt, wie es der Beschaffenheit der Dinge gemäß ist, welche der kennen muß, der die Rechenkunst anwenden will. Inzwischen ist es für solche Anfänger dienlich, welche nur wenig Theo-

rie

rie lernen können, oder wollen. Wenn diese beurtheilen wollen, ob ein Exempel zur ordentlichen, oder verkehrten Regel Detri gehöre, so müssen sie auf die Fragzahl acht geben.

Kann man sagen: Je grösser die Fragzahl ist, desto grösser: und je kleiner die Fragzahl ist, desto kleiner muß die gesuchte Zahl seyn; so gehört es zur ordentlichen Regel Detri. Muß man aber so sagen: Je grösser die Fragzahl ist, desto kleiner, und je kleiner die Fragzahl ist, desto grösser muß die gesuchte Zahl seyn; so gehört das Exempel zur verkehrten Regel Detri.

Im obigen Exempel erhellet, daß man so sagen müsse: Je mehr Monathe, desto weniger Leute sind nöthig, und je weniger Monathe, desto mehr Leute sind nöthig, wenn dasselbe Werk zu Stande kommen soll.

207 §.

Die Reductionen einer Münze, eines Maaßes, eines Gewichts auf eine andre Münze, Maaß, Gewicht u. s. f. können ebenfalls hieher zur verkehrten Regel Detri gezogen werden, nachdem man sich die Sache vorstellen will. Einerley Länge, einerley Gewicht, einerley Geldsumme, wird unter einem doppelt so grossen Nahmen durch eine halb so grosse Zahl ausgedrückt, und umgekehrt unter einem halb so grossen Nahmen durch eine doppelt so grosse Zahl. Wenn eine Elle doppelt so lang, als ein Fuß ist: so wird eben die Länge nur halb so viele Ellen, als Füße enthalten. Man nehme das erste Exempel aus dem 195. §., wo die Frage war: 194 Kayser-

gulden wieviel sind es Thaler? Die Proportion, welche die Antwort giebt, ist eigentlich diese:

Thal: Kayserfl: = 194 : ges. Anzahl von Thalern.

Weil nun 3 Mark einen Thaler, 2 Mark einen Gulden machen; so ist das soviel, als wenn man ansetzt

3 Mk: 2 Mk: = 194 Kayserfl: ges. Thal.; und man erhält $\frac{2 \times 194}{3} = 129\frac{1}{3}$ Thl: wie im 195 §.

Wenn man sich von diesem Exempel eine Vorstellung nach gemeiner Art machen will: so muß man 1 Thl. als die Fragzahl ansehen, und sich die Sache so vorstellen: Wenn 1 Kfl. giebt 194 Stück, wie viel giebt ein Thaler? Nun weis man; je grösser der Werth einer Münze ist, desto weniger gehören davon zu einer verlangten Summe Geldes. Also muß hier die Fragzahl voranstehen, und der gemeine Ansatz ist dieser:

Wie viel 1 Thl.? — 194 Stück — 1 Kfl:
3 Mk.? 2 Mk: Facit $129\frac{1}{3}$ Stück in Thalern.

208 §.

Ein doppeltes Capital trägt in halb so vieler Zeit eben so viel Zins, als das einfache in der doppelten Zeit, und überhaupt sind die Zeiten den Capitalien umgekehrt proportional, wenn die Zinsen gleich seyn sollen. Man setze also, Cajus hat dem Titius 1000 rthl. auf 8 Monathe ohne Zins geliehen gehabt, und nun leihet Titius dem Cajus 700 rthl. mit dem Beding, sie so lange zu behalten, bis der Dienst auf beyden Seiten gleich werde. Die Frage ist: wie lange Cajus die ihm geliehenen 700 rthl. behal-

behalten müsse? Er muß sie so lange behalten, bis sich die Zinsen davon eben so hoch belaufen, als die Zinsen von 1000 rthl. in 8 Monath. Man schließt:

700 rthl: 1000 rthl: = 8 Mon: ges. Zeit. Diese gesuchte Zeit wird = $\frac{80}{7}$ Monath = 11 $\frac{3}{7}$ Mon: = 11 Mon: 13 Tage.

Wenn jemand zwey oder mehr Capitalien nach verschiedenen Zeiten zu zahlen schuldig ist: so läßt sich auf ähnliche Art berechnen, wie lange er alle zusammen behalten könne, wenn er sie auf einem Brete bezahlen will. Er kann nemlich die ganze Summe auf eine so lange Zeit behalten, in welcher sie eben so viele Zins trägt, als die Summe aller Zinsen, die jedes einzelne Capital in seiner Zeit tragen würde. Dies ist der Grund der sogenannten Zeit-Rechnung bey ausstehenden Schulden.

209 §.

Je breiter ein Stück Zeug ist, das zu einerley Absicht, z. E. Kleidung, Tapezierung eines Zimmers u. s. f. gebraucht werden soll, desto weniger hat man davon in Absicht der Länge nöthig. Wenn es doppelt so breit ist, wie ein andres, so braucht es nur halb so lang zu seyn, als jenes, und überhaupt muß die Länge der Breite umgekehrt proportional seyn. Man setze es werden zu einer Kleidung 10 Ellen Zeug à $\frac{5}{4}$ breit, erfordert, und man nimmt dazu Unterfutter, von 2 Ellen Breite, so frägt sich, wie viel Unterfutter man nöthig habe? Folgende Proportion giebt die Antwort:

2 Ellen : $\frac{5}{4}$ = 10 Ellen : $\frac{50}{8}$ Ell. = 6 $\frac{1}{4}$ Ell.

Bey diesem letztern und ähnlichen Fällen, dergleichen z. E. im 203 und 206 §. vorkommen, sind die

Proportionen eben nicht in völliger Schärfe zu nehmen. Wenn es gleich seine Richtigkeit hat, daß ein Paar viereckte Stücken Zeug gleich groß sind, wenn ihre Längen den Breiten umgekehrt proportional sind: so lassen sich doch die zerschnittenen Stücke nicht allemahl eben so genau wieder zusammenfügen, bey den mannigfaltigen Einrichtungen der daraus zu verfertigenden Kleider, oder andrer Sachen, daß nicht etwas mehr oder weniger zuweilen darauf gehen sollte, als die Rechnung giebt. So setzt auch die Rechnung im 203 und 206 §. voraus, daß von mehrern Arbeitern jeder in eben der Zeit so viel, als der andre zu Stande bringe, auch jeder für sich in gleichen Theilen der Zeit gleich viel ausrichte. Dies kann aber nie so genau genommen werden.

210 §.

Wer die bisherigen Lehren sich wohl bekannt gemacht hat, der wird sich leicht in solchen Fällen finden können, wenn mehr als drey Zahlen gegeben sind, und man die Zahl, welche eigentlich verlangt wird, durch eine wiederholte Anwendung der Regel Detri suchen muß. Von der Art wäre das zweyte Exempel des 202 §., wenn man es so ausdrückte: 100 Thl. geben in 1 Jahr 5 Thl. Zins, wie viel also 1000 Thl. in 7 Jahr 5 Monath? Man berechnet hier zuerst die einjährigen Zinsen von 1000 Thl. aus der Proportion

100 thl : 1000 thl. = 5 thl : 50 thl. ein jährl. Zins von 1000 thl.

Weil man nun weiß, daß 1000 thl. in 1 Jahr 50 thl. Zins geben, so setzt man ferner an

1 J. : $7\frac{5}{12}$ J. = 50 thl. : $370\frac{5}{6}$ thl. als die eigentlich gesuchte Zahl.

Man

Man hat in Fällen von dieser Art nicht nöthig den doppelten Ansatz zu machen, und die vierte Zahl in der ersten Proportion würklich zu berechnen: es läßt sich alles in einen einzigen Ansatz bringen, und die Rechnung wird merklich verkürzt, wenn man folgende Betrachtung zu Hülfe nimmt.

Aus den beyden Proportionen

100 thl : 1000 thl. = 5 thl : 50 thl.
1 J. : $7\frac{5}{12}$ J. = 50 thl : $370\frac{5}{6}$ thl.

folgt nach dem 174 §. diese:

$100 \times 1 : 1000 \times 7\frac{5}{12} = 5 \times 50 : 50 \times 370\frac{5}{6}$,

und die beyden letzten Glieder kann man durch 50 dividiren, ohne ihr Verhältniß zu ändern, (173 §) so daß man diese Proportion erhält

$100 \times 1 : 1000 \times 7\frac{5}{12} = 5 : 370\frac{5}{6}$.

Hier ist die vierte Zahl diejenige, welche man eigentlich suchte, und die Zahl 50, welches in der ersten Proportion die vierte war, fällt ganz weg. Die letzte Proportion ergiebt, daß sich die Zinsen von verschiedenen Capitalien in verschiedenen Zeiten wie die Producte der Capitalien in die Zeiten verhalten, auf welche sie verliehen sind. Wer dies ein für allemahl merket, der kann den Ansatz so machen

100 thl. × 1 J. : 1000 thl. × $7\frac{5}{12}$ J. = 5 thl :

$$\frac{1000 \times 7\frac{5}{12} \times 5}{100 \times 1} = 370\frac{5}{6} \text{ thl.}$$

Es kommen viele andre Fälle in der Ausübung vor, wo sich ein ähnliches Verfahren anbringen läßt,

und die practischen Schriftsteller geben für dergleichen Fälle eine besondre Regel, die sie die *regulam quinque* nennen, weil zu fünf Zahlen die sechste gesucht wird. Man hat hier in der eigentlichen Frage zwey Zahlen, als Frag-Zahlen, worauf zwey andre Zahlen eine ähnliche Beziehung haben. Wenn man jedes Paar dieser Zahlen als Factoren eines Products untereinander schreibt; so kann man übrigens den ganzen Ansatz, auf eine ähnliche Art wie im 196 §, so einrichten

100 thl. geben 5 thl. Zins. Wie viel 1000 thl?
in 1 J. in $7\frac{5}{12}$ J.

P. 100 Prod. $\frac{89000}{12}$

Also die gesuchte Zahl $= \frac{5 \times 89000}{12 \times 100} =$

$\frac{5 \times 890}{12} = 370\frac{5}{6}$ thl.

Hierauf gründet sich folgende gemeine Regel, wie ein Exempel nach der Regel quinque anzusetzen sey.

Man setze beyde Fragzahlen am Ende untereinander, das, was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in der Mitte, und die beyden übrigen Zahlen vorne an untereinander. Die beyden Fragzahlen, imgleichen die beyden Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man ineinander, so geben sich drey Zahlen, womit man nun nach der ordentlichen Regel Detri umgehet.

Es läßt sich in vielen ähnlichen weit mehr zusammengesetzten Fällen, wo man die Regel Detri drey- vier- und mehrmahl nach einander anwenden müste, eine völlig ähnliche Verkürzung anbringen, und die gesammten hieher gehörigen Rechnungs-Vortheile machen die sogenannte zusammengesetzte Regel Detri aus. Es ist davon im zweyten Theil bey der weitern Ausführung der Rechenkunst ausführlicher gehandelt worden.

Der Geometrie erster Theil.

Die ebene Geometrie.

Der I. Abschnitt.

Von den ersten Grundwahrheiten der Geometrie, und insbesondre von den graden Linien und Winkeln.

1 §.

Die Eigenschaft der Grösse kommt den körperlichen Dingen im eigentlichen Verstande zu, insofern diese einen gewissen Raum einnehmen. Ob nemlich ein Körper grösser, oder kleiner, als der andre sey, beurtheilen wir daher, daß der eine bald mehr, bald weniger Raum, als der andre einnimmt, oder wie man auch zu reden gewohnt ist, der eine bald mehr bald weniger ausgedehnt ist, als der andre. Von diesem Raum aber, den ein Körper ausfüllt, haben wir schwerlich einen andern, als einen blos sinnlichen Begriff: wenigstens genüget es hier, wenn man sich allein an dem sinnlichen Begriff hält. Wäre ein gewisser Körper, z. E. ein Würfel, in zerschmolzenes Wachs, oder etwas dergleichen, ganz eingetaucht: so würde das Wachs beym Erkälten sich rund um an den Körper anhängen. Man setze, der Körper könnte, nach dem das Wachs erkältet, aus dem-

demselben herausgebracht werden, ohne daß die Rinde, so ihn allenthalben umgiebt, zerbrochen würde; so würde innerhalb des Wachses eine Höhlung bleiben, mit dem herausgeschaften Würfel von einerley Gestalt, und Grösse. Eben diese Hölung ist der Raum, den der Würfel einnahm, da er noch im Wachs verschlossen war. Einen solchen Raum nimmt der Würfel allenthalben ein, wo man ihn auch hinbringt, und die Grösse und Gestalt dieses Raums ist mit der Grösse und Gestalt des Würfels allemahl einerley. Man kann sich leicht auf ähnliche Art eine Vorstellung von dem Raum machen, den jeder andre Körper ausfüllt.

2 §.

Die Grösse, welche eigentlich den körperlichen Dingen allein eigen ist, nennt man eine ausgedehnte Grösse, weil der Körper desto grösser, oder kleiner ist, je mehr oder weniger er ausgedehnt ist. Die Grösse seiner Ausdehnung ist mit der Grösse des Raums, den der Körper ausfüllt, allemahl einerley (1 §). Deßwegen heißt auch wohl der Raum selbst eine ausgedehnte Grösse.

3 §.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft von der Art und Weise, wie man eine ausgedehnte Grösse mit der andern vergleichen, und aus gegebenen Grössen von dieser Art andre von eben der Art finden kann. Sie ist eine Wissenschaft von einem ungemein grossen Umfange, und der Nahme drückt den Vorwurf derselben nicht in seiner völligen Allgemeinheit aus. Das griechische Wort γῆ bedeutet nicht allein die ganze Erde; sondern auch oft eine Landschaft, ein Stück Feld, und der Name μέτρον bedeutet ein

Maaß

Maaß. Also würde man den griechischen Namen Geometrie füglich durch das deutsche Wort: Feldmeßkunst übersetzen können. In der That stehen auch viele noch in den Gedanken, daß Geometrie und Feldmeßkunst einerley Wissenschaft sey: und vor Zeiten, bevor die Wissenschaft ihre jetzige Vollkommenheit erreicht hatte, war es auch würlich so: die Regeln, nach welchen sich ein Feld aufmessen läßt, machten wahrscheinlicher Weise die erste Geometrie aus. Die Nothwendigkeit hat die Menschen dahin gebracht, auf solche Regeln zu denken, und man schreibt ihre Erfindung gemeiniglich den alten Egyptern zu. Aber die Griechen haben schon lange vor Christi Geburt dieser Wissenschaft eine ganz andre Gestalt gegeben, und ihre Lehren so allgemein gemacht, daß man sie nunmehro allenthalben anwenden kann, wo sich eine ausgedehnte Grösse mit einer andern vergleichen läßt. So viel man weis, ist der unter den Geometern so berühmte Euclides der erste, welcher die zu seiner Zeit bekannt gewesenen geometrischen Lehrern gesammlet, und einen Lehrbegriff der Geometrie verfasset hat, der noch bis auf den heutigen Tag das Muster aller übrigen Lehrbücher dieser Wissenschaft ist. Euclides lebte etwa 300 Jahre vor Christi Geburt, und sein Lehrbuch ist unter dem Titel: Euclidis elementa, bekannt.

4 §.

Wenn man sich von dem leeren Raum, den ein Körper ausfüllte, da er in demselben befindlich war, etwa eine solche Vorstellung macht, wie im 1 §: so siehet man leicht, daß dieser leere Raum eigentlich kein Körper heissen könne, ob er gleich einige Eigen-

schaften

schaften des Körpers, der ihn ausfüllte, behält, nemlich Gestalt und Grösse. Die übrigen Eigenschaften des Körpers kommen in der Geometrie gar nicht in Betrachtung, und das ist die Ursache, weßwegen dieser leere Raum ein geometrischer Körper heißt. Es ist hier gleich viel, ob man sich diesen Raum mit irgend einem Körper angefüllt vorstellt, oder nicht.

5 §.

Jeder Körper hat gewisse Gränzen, die ihn von allen Seiten umgeben, und diese äusserste Gränze desselben, die ihn von allen Seiten umgiebt, heißt seine Oberfläche. Man kann sich auch einzelne Theile einer solchen Oberfläche allein vorstellen, dergleichen z. E. die sechs Seiten-Flächen eines Würfels sind: dann aber hat eine solche Fläche wiederum ihre Gränzen, und diese Gränzen der Oberflächen heissen geometrische Linien. Auch hier kann man sich einzelne Theile von der Gränze vorstellen, die eine solche Fläche von allen Seiten umgiebt, die ebenfalls Linien sind: Jede Seiten-Fläche eines Würfels von vier solchen Linien eingeschlossen.

6 §.

Auch eine jede Linie hat ihre Gränzen, wo sie anfängt und aufhört. Die Gränzen einer Linie heissen geometrische Puncte. Man kann sich jede Linie, wo man will, getheilt vorstellen, und die Gränze, wo beyde Stücke zusammenhängen, wird ein Punct seyn. Also kann man sich in einer Linie unzählig viele Puncte vorstellen: nur muß man sich hier die Vorstellung nicht machen, als ob eine solche Linie etwa aus einer Menge aneinander gelegter Puncte bestehe. Wenn

1 Fig. eine Linie, die sich von A nach B erstreckt, bey C in zwey Stücke AC und CB getheilt wird; so fängt das Stück AC in A an, und endiget sich in C: aber C ist nicht allein der Endpunct von AC, sondern zugleich der Anfangspunkt von CB. Die beyden Stücke AC und CB hängen in dem Punct C zusammen.

7 §.

Wenn die Theile einer Grösse so miteinander zusammenhängen, daß da, wo der eine aufhört, zugleich der andre anfängt, und zwischen beyden nichts vorhanden ist, das zu dieser Grösse nicht gehört: so heißt sie eine sterige Grösse (quantitas continua). So sind alle ausgedehnte Grössen beschaffen, die man in der Geometrie betrachtet, wie das vorige Exempel von der Linie zeiget. Die in der Welt würklich vorhandenen Körper sind nicht von der Beschaffenheit, welches bey einigen deutlich in die Augen fällt. In dem Innern eines Schwammes z. E. befinden sich unzählig viele Löcher, die mit der Materie des Schwammes nicht ausgefüllt sind, und zwischen einem Paar nach einander folgenden Theilchen befindet sich häufig Luft, Wasser, und dergleichen fremde Materie, die zu dem Schwamm selbst nicht gehöret.

8 §.

Man theilt die Linien in verschiedene Classen, und unterscheidet vornemlich grade und krumme Linien von einander. Der Begriff von demjenigen, was grade sey, gehört zu den einfachen Begriffen, und läßt sich schwerlich durch irgend eine Erklärung deutlich machen. Aber dies weiß auch ein jeder von selbst, und man lernt von Jugend auf so gut unterscheiden,

scheiden, was grade, oder nicht grade sey, wie man die Farben unterscheiden lernt, ohne daß man im Stande ist zu sagen, wie z. E. roth oder grün aussiehet. So viel kann man inzwischen von einer graden Linie sagen, daß sie sich von ihrem Anfangs- bis zum End-Punct in einerley Richtung erstrecke, und man bemühet sich vergeblich, mehr Merkmahle derselben durch Worte anzugeben: es sey denn, daß man mit vielen Worten immer einerley sagen will. Eine krumme Linie ist eine solche, wovon kein Theil grade ist. Eine grade Linie also, die sich von einem Punct der krummen Linie bis zu einem andern in eben der Linie erstreckt, ist von dem zwischen eben diesen Puncten liegenden Stück der krummen Linie allemahl unterschieden, die beyden Puncte mögen so nahe an einander liegen, als man will.

9 §.

Man nimmt in der Geometrie die Voraussetzung an, daß es allemahl möglich sey, von einem gegebenen Punct A bis zum andern C eine grade Linie zu ziehen, und diese grade Linie AC vorwärts nach B, oder auch rückwärts nach D, so weit, als man will, zu verlängern. Eigentlich lassen sich keine blos geometrische Linien sinnlich darstellen; so wenig, als man geometrische Puncte sinnlich vorstellen kann. Allein ein Tüpfelchen, das man mit Dinte, oder etwas dergleichen, vermittelst einer spitzigen Feder auf dem Papier macht, ist eine sinnliche Abbildung des Puncts, und ein Strich, den man mit einer zarten Feder ziehet, ist eine sinnliche Abbildung einer Linie. Man siehet das Tüpfelchen als etwas an, das gar keine Ausdehnung hat, und

1 Fig.

bey dem Strich betrachtet man blos die Ausdehnung nach der Länge. Deswegen kann man solche Bilder der Puncte und Linien so ansehen, als wenn es würklich geometrische Puncte und Linien wären. Beweg-te sich ein wahrer geometrischer Punct von A nach C: so würde der Weg, durch welchen er gegangen wäre, eine Linie seyn. Wenn überdem der Punct, während seiner Bewegung seine Richtung nie änderte; so wäre sein Weg eine grade Linie. Deswegen kann man sich die Vorstellung machen, daß eine Linie entstehe, indem ein Punct von einem Ort zum andern fortgeht, und daß eine grade Linie entstehe, wenn dieser Punct, indem er fortgeht, seine Richtung nicht ändert.

10 §.

Wenn die Oberfläche eines geometrischen Körpers so beschaffen ist, daß jede grade Linie, die man zwischen zweenen auf dieser Oberfläche angenommnen Puncten ziehen kann, ganz in diese Oberfläche fällt: so heißt sie eine ebene Fläche, auch schlechthin eine Ebene. Eine krumme Fläche aber ist eine solche, worauf sich kein Theil, der eben wäre, angeben läßt. Ein zarter nicht sehr langer Faden wird grade, wenn man ihn ausspannt. Wenn man auf einem ebenen Tische zwischen zweenen angenommenen Puncten einen solchen Faden spannt: so wird er sich allenthalben an dem Tische anschliessen, wo auch die Puncte auf dem Tische angenommen werden. Hierauf gründet sich die Art, wie man vermittelst des Lineals auf einer ebenen Fläche von einem Punct zum andern eine grade Linie zieht. Weil das Lineal selbst eben, und an seiner Schärfe grade ist; so wird die Schär-

fe

se an der Ebene allenthalben anschliessen, wenn man sie an zweenen Puncten auf dieser Ebene anlegt, und nun kann man eine spitzige Feder, oder etwas dergleichen, an der Schärfe des Lineals von einem Puncte zum andern fortführen.

11 §.

Ueberhaupt wird in der Geometrie anfangs zum Grunde gesetzt, daß alle Linien und Puncte, die in Betrachtung kommen werden, auf einer und eben derselben Ebene liegen: und diejenigen Lehren von den ausgedehnten Grössen, welche sich in dieser Voraussetzung erweisen lassen, machen den ersten Haupttheil der Geometrie aus, welcher den Namen der ebenen Geometrie (Geometria plana) führet.

12 §.

Wenn man durch zwey Puncte *A* und *C* eine grade Linie *DB* gelegt hat: so ist dadurch die Lage dieser Linie völlig bestimmt, und man kann durch eben die Puncte A und C keine andre grade Linien legen, die von der vorigen der Lage nach unterschieden wäre, ob sie gleich länger oder kürzer seyn könnte. Wenn man durch eben die Puncte A und C noch andre grade Linien ziehet: so fallen sie insgesammt mit der ersten zusammen.

13 §.

Man kann von einem und eben demselben Punct 2 Fig. A, ein Paar unterschiedene grade Linien AB und AC fortziehen, so daß beyde in dem Punct A zusammenstossen. Diese Lage zwoer graden Linien gegen einander, wenn sie von einem gemeinschaftlichen Puncte

A nach verschiedenen Richtungen AB, und AC fortgezogen sind, heißt ein gradlinichter ebener Winkel, oder schlechthin ein Winkel, weil in der ebenen Geometrie von keinen andern Winkeln, die Rede seyn wird. Der Punct A, worinn beyde Linien zusammenstossen, heißt die Spitze, und die beyden graden Linien AB, und AC die Seiten oder Schenkel des Winkels.

14 §.

3 Fig. Verlängert man die beyden Schenkel AB, und AC eines Winkels durch die Spitze A nach der entgegengesetzten Seite, bis E und D: so erhält man zwo grade Linien, BE und CD, die sich bey A durchschneiden, und es erhellet leicht, daß zwo solche grade Linien sich nicht in mehrern, als in dem einen Punct *A* schneiden können. Wenn beyde Linien ausser A noch einen andern Punct F gemein hätten; so würde die eine mit der andern völlig zusammenfallen müssen (12 §.), und es wären nicht zwo der Lage nach unterschiedene grade Linien. Uebrigens erhellet leicht, daß jede grade Linie, wie CD, die Ebene, worauf sie verzeichnet ist, in zwey Stücke theile, die zu beyden Seiten dieser Linie CD liegen werden. Und wenn ein Punct *B* auf der einen, ein anderer Punct *E* aber auf der andern Seite der Linien *CD* liegt: so wird die grade Linie *BE* die vorige *CD* gewiß irgendwo schneiden.

15 §.

Allemahl, wenn eine grade Linie CD die andre BE schneidet; so entstehen um den Durchschnittspunct A herum vier unterschiedene Winkel, die man mit

Buch-

Buchstaben so bezeichnen muß, daß einer mit dem andern nicht verwechselt werde. Dies erhält man am besten dadurch, wenn man jeden Winkel mit dreyen Buchstaben bezeichnet, davon einer an der Spitze, und zweene an den Schenkeln gesetzt werden. Im Schreiben aber, und in der Aussprache setzt man allemahl denjenigen Buchstaben in der Mitte, welcher an der Spitze stehet. Wenn nun gleich noch weit mehr als vier Winkel in eben der Spitze A zusammenstossen: so wird doch keiner mit den übrigen verwechselt werden. Wenn z. E. der Winkel, welcher in der Zeichnung rechter Hand liegt, verstanden werden soll: so nennt man ihn BAC, oder auch CAB, derjenige, welcher ihm linker Hand grade gegen über liegt, heißt DAE, oder EAD u. s. f. Wenn eben die Spitze A nur zu einem Winkel gehöret, wie in der 2 Fig. zwoten Figur: so ist es hinlänglich den Winkel mit dem einzigen Buchstaben A, der an seiner Spitze stehet, anzudeuten, weil nun daher keine Verwirrung zu besorgen ist. Oft ist es auch bequem einen kleinen Buchstaben, wie x, y u. s. f. in der Oefnung zwi- 3 Fig. schen den Schenkeln zu setzen, und dadurch die Winkel zu unterscheiden.

16 §.

Wenn eine ausgedehnte Grösse so auf eine andre gelegt werden kann, daß die Gränzen der einen mit den Gränzen der andern zusammen fallen: so sagt man, sie passen auf einander. Sind es geometrische Körper (oder wenigstens nicht blos Linien, Winkel, und ebene Flächen), und kann man den einen in den andern so hineinschieben, daß beyde völlig zwischen einerley Gränzen enthalten sind, wie wenn

man im 1 §. den dort als ein Beyspiel erwähnten Würfel wiederum in die Hölung innerhalb des Wachses brächte: so sagt man besser, daß sie ineinander passen.

Es ist am leichtesten, diesen Gedanken auf grade
4 Fig. Linien und Winkeln anzuwenden. Die Gränzen einer graden Linie sind ihre beyden Endpuncte. Kann man demnach die grade Linie CD auf AB so auflegen, daß wenn der Punct C auf A, und CD auf AB liegt, auch D in B fällt: so paßt CD auf AB. Die Spitze eines Winkels, nebst seinen beyden Schenkeln, machen seine Gränzen aus. Kann man demnach den
5 Fig. Winkel EDF in den Winkel BAC so hineinschieben, daß wenn die Spitze D auf der Spitze A, und der eine Schenkel DF auf AC liegt, auch der andre Schenkel DE auf AB fällt; so paßt der Winkel EDF auf dem Winkel BAC.

In Ansehung der Winkel ist folgendes aber noch anzumerken. Es kann der Winkel EDF auf dem Winkel BAC passen, obgleich weder DE auf AB, noch DF auf AC paßt. Es hängt nämlich die Grösse des Winkels gar nicht von der Grösse seiner Schenkel ab, sondern allein von der Grösse der Oefnung zwischen den Schenkeln. Wenn man sich bey A etwa ein Gewinde vorstellt, um welches sich der Schenkel AB umdrehen läßt: so wächst der Winkel BAC, wenn man AB von AC weg gegen AG zu drehet, und der Winkel BAC wird kleiner, wenn man AB von AG weg gegen AC zu drehet. Aber wenn gleich AB länger oder kürzer würde, ohne sich um A zu drehen: so würde die Grösse des Winkels BAC ungeändert bleiben.

17 §.

17. §.

Ausgedehnte Grössen, die auf und ineinander passen, sind gleich groß. Grade Linien also und gradlinichte Winkel sind gleich groß, wenn sie auf einander passen.

18 §.

Ueberhaupt zu sagen, läßt sich dieser Satz nicht umkehren. Es ist falsch, daß alle ausgedehnte Grössen, die gleich groß sind, auch auf einander passen müssen. Wenn aber blos von graden Linien und Winkeln die Rede ist: so ist der Satz auch umgekehrt allgemein wahr, welches folgende Sätze beweisen.

Wenn eine grade Linie CE auf eine andre AB nicht 4 Fig.
paßt: so ist CE entweder kleiner, oder grösser, als AB. Legt man nemlich C auf A, und CE auf AB, so deckt CE entweder nur einen Theil von AB, da dann CE < AB ist; (12 §. Rech.) oder E fällt über B hinaus, und so deckt ein Theil von CE die ganze Linie AB, daß also nun CE > AB ist (12 §. Rech.)

Wenn ein Winkel EDF in einem andern GAC nicht
paßt: so ist wiederum EDF entweder kleiner, oder grösser, als GAC. Legt man D auf A, und DF auf AC: so fällt DE entweder zwischen AC und AG, 5. 6 F.
und so ist EDF < GAC; oder DE fällt über AG hinaus, in AH, wie in der 6 Fig. da dann EDF > GAC ist.

Gleich grosse grade Linien und gleich grosse gradlinichte Winkel müssen also nothwendig auf einander passen. Denn paßte die eine Linie nicht auf der andern, und der eine Winkel nicht auf

dem andern: so wäre die eine Linie entweder kleiner, oder grösser, und der eine Winkel entweder kleiner, oder grösser, als der andre, welches nicht seyn kann, da beyde gleich groß seyn sollen.

19 §.

7 Fig. Wenn von einem Punct D einer graden Linie AB eine andre grade Linie DC fortgezogen wird; so kommen zweene Winkel, CDA, und CDB heraus, die eine gemeinschaftliche Spitze D, und einen gemeinschaftlichen Schenkel DC haben, deren übrige Schenkel DA, und DB aber in grader Linie liegen. Solche Winkel heissen Neben-Winkel (contigui, deinceps positi). 8 Fig. Stehet die grade Linie EF auf GH so, daß beyde Nebenwinkel EFG und EFH, gleich groß sind, wie in der 8 Figur; so sagt man EF stehe auf GH grade, oder senkrecht, auch lothrecht, (perpendicularis, normalis) und die beyden gleich grossen Nebenwinkel EFH, und EFG heissen rechte Winkel (anguli recti). 7 Fig. Wenn beyde Nebenwinkel CDA, GDB, ungleich sind; so sagt man, daß CD auf AB schief stehe, und die Winkel ADC, und BDC heissen schiefe Winkel. Man ist gewohnt, statt des Worts rechter Winkel, der Kürze wegen, den Buchstaben R zu brauchen. Wenn man also setzt EFH = R: so heißt dies so viel, es sey EFH ein rechter Winkel.

20 §.

8 Fig. Wenn in der 8 Fig. die Linie EF sich um F gegen FG zu drehet, so wächst der Winkel EFH; und wenn dies so lange fortgehet, bis EF in GF fällt: so ist nun der Winkel EFH um das Stück EFG angewachsen,

sen, und folglich der Winkel GFH = GFE + EFH = R + R = 2 R. Das will so viel sagen: ein Winkel, dessen Schenkel in grader Linie liegen, ist doppelt so groß, als ein rechter Winkel: oder ein rechter Winkel ist die Hälfte eines solchen Winkels, dessen Schenkel in grader Linie liegen.

Wenn sich die Linie FE noch weiter herunter drehet, und nun unter FG in Fe fällt: so enthält der erhabene Winkel HFe, nicht allein HFG; sondern überdem noch GFe, und ist folglich grösser, als zweene rechte Winkel.

21 §.

Alle Winkel, deren Schenkel in grader Li- nie liegen, wie *ADB*, und *GFH* sind gleich groß. Zu. 8. Fig.

Beweis. Denn legt man F auf D, und FH auf DB, so muß FG nothwendig auf DA fallen (12 §). Also paßt der Winkel GFH auf ADB (16 §), und es ist GFH = ADB (17 §).

Hieraus folgt, daß alle rechte Winkel gleich groß sind: denn alle rechte Winkel sind Hälften von solchen Winkeln, deren Schenkel in grader Linie liegen (20 §), und diese Hälften sind gleich groß (44 § Rech.)

Wenn demnach in der 7 Fig. DE auf AB lothrecht stehet: so kann man durch eben den Punct D nicht noch eine andre auf AB lothrechte Linie ziehen, die von DE unterschieden ist. Denn wäre DC eine solche Linie, so wäre CDB = R = EDB, welches nicht seyn kann.

22 §.

7 Fig. Zweene Nebenwinkel auf einer graden Linie, wie *ADC* und *CDB* betragen zusammen allemahl so viel, als zweene rechte Winkel.

Beweis. Weil ADB = 2 R (20 §), und ADC + CDB = ADB (9 § Rech.) so ist ADC + CDB = 2 R.

Der Satz erstreckt sich auch auf mehr, als zweene Winkel, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, und so an einander liegen, daß jeden zweenen nach einander folgenden ein Schenkel gemein ist, wenn die äussern Schenkel in grader Linie liegen, wie in der 7 Fig. ADE, EDC, CDB sind.

23 §.

7 Fig. Wenn zweene, oder mehr an einander liegende Winkel wie *BDC*, *CDA*, die Summe von zweenen rechten Winkeln ausmachen: so liegen ihre äussern Schenkel *DB* und *DA* in grader Linie.

Beweis. Wäre BDA keine grade Linie: so verlängere man BD nach F, und setze es sey BDF eine grade Linie. Alsdenn ist BDC + CDA = 2 R = BDF (22 §) = BDC + CDF: folglich wäre CDA = CDF (28 §. Rech.), welches nicht seyn kann.

24 §.

9 Fig. Von einem Punct A kann man nach allen Seiten so viele grade Linien AB, AC, AD, AE, AF, als man will, in einer Ebene fortziehen: alsdenn machen alle Winkel, die um den Punct *A* herumliegen, die Summe von vier rechten Winkeln aus. Denn man kann eine dieser Linien, welche man will, z. E. FA durch A nach G verlängern: so fallen diese Winkel um A herum zum Theil auf

der einen, zum Theil auf der andern Seite von FG. Aber die Summe derer, die auf jeder Seite liegen, beträgt zweene rechte Winkel (22 §): also machen sie alle die Summe von vier rechten Winkeln aus.

25 §.

Alle Winkel lassen sich nun in drey Classen bringen. Jeder Winkel ist entweder ein rechter, oder ein schiefer Winkel, und der schiefe ist entweder kleiner, oder grösser, als ein rechter Winkel. Winkel, die kleiner sind, als rechte Winkel, heissen spitze Winkel (acuti), und Winkel, die grösser sind, als rechte Winkel, werden stumpfe Winkel (obtusi) genannt. Die stumpfen Winkel kann man wieder eintheilen in solche, die kleiner, eben so groß, oder grösser als zweene rechte Winkel sind: die erste Art könne man hole (concavos) die letzte Art erhabene Winkel (convexos) nennen.

Von zweenen ungleichen Nebenwinkeln CDB und 7 Fig.
CDA auf einer graden Linie AB ist also allemahl der eine spitz, und der andre stumpf. Denn es wird einer z. E. CDB $< \frac{1}{2}$ ADB, und der andre CDA $> \frac{1}{2}$ ADB seyn. Also ist CDB $<$ R, und CDA $>$ R (21 §) folglich CDB ein spitzer, CDA aber ein stumpfer Winkel.

26 §.

Ein Winkel CDA der mit einem andern CDB zu- 7 Fig.
sammengenommen zweene rechte Winkel ausmacht, heißt des Winkels CDB Ergänzung oder Complement zu zweenen rechten Winkeln. Man findet dieses Complement leicht für jeden gegebenen Winkel CDB, der kleiner, als zweene rechte Winkel ist, wenn man den einen Schenkel BD durch die Spitze D bis A ver-

verlängert. Denn so erhält man den Nebenwinkel CDA, welcher die gesuchte Ergänzung ist (22 §).

2 Fig. Jedem hohlen Winkel BAC stehet ein erhabener Winkel auf der andern Seite entgegen, der mit ihm 4 rechte Winkel ansmacht (24 §). Man kann also den erhabenen Winkel des hohlen Winkels Ergänzung oder Complement zu 4 rechten Winkeln nennen, und umgekehrt.

7 Fig. Ein Winkel EDC der mit einem spitzen Winkel CDB einen rechten Winkel ausmacht, kann auf ähnliche Art des Winkels CDB Ergänzung oder Complement zum rechten Winkel heissen.

27 §.

3 Fig. Wenn eine grade Linie *BE* eine andre *CD* in *A* schneidet: so sind die an der Spitze *A* entgegengesetzten Winkel *BAC*, und *DAE*, oder die Scheitelwinkel, wie man sie gewöhnlich nennt, gleich groß.

Beweis. Weil DAB + BAC = 2 R und DAB + DAE = 2 R (22 §): so ist DAB + BAC = DAB + DAE, folglich BAC = DAE (28 §. Rech.)

Wenn also einer von den vier Winkeln um A ein rechter Winkel ist, so ist jeder der übrigen auch ein rechter Winkel: und überhaupt bestimmt die Grösse des einen allemahl die Grösse der drey übrigen. Denn es ist BAC = DAE und BAD = 2 R — BAC = EAC.

28 §.

3 Fig. Wenn *DAB* und *BAC* ein Paar Nebenwinkel auf der graden Linie *CD* sind, und wenn von *A* aus auf der andern Seite von *CD* eine grade Linie *AE* so gezogen ist, daß der Winkel *DAE*

dem

dem entgegengesetzten *BAC* gleich ist: so liegen *AE* und *AB* in grader Linie.

Beweis. Es ist DAB + BAC = 2 R (22 §). Da nun DAE = BAC: so ist auch DAB + DAE = 2 R, und folglich liegt AE mit AB in grader Linie (23 §).

Der II. Abschnitt.

Vom Umfange der ebenen Figuren überhaupt, und insbesondere von der Kreislinie.

29 §.

Wenn man zwischen einem Punct B in dem ei- 1 oF.
nen Schenkel AB, und einem andern Punct C in dem andern Schenkel AC des gradlinichten Winkels BAC eine grade Linie BC ziehet: so erhält man eine ebene Fläche, die von allen Seiten durch drey grade Linien AB, BC, AC, begränzt ist. Auf ähnliche Art läßt sich eine Ebene durch so viel Linien, als man will, einschliessen, wie AB CD EF, und es 1 1F.
ist nicht nothwendig, daß die Linien AB, BC, u. s. f. grade sind: es können einige derselben krumme, es können auch alle diese Linien krumme Linien seyn. Eine ebene Fläche, die von allen Seiten begränzt ist, heißt eine ebene Figur, oder hier schlechthin eine Figur, weil in der ebenen Geometrie nie von andern Figuren die Rede ist. Die Linien, welche die Figur umschliessen, heissen ihre Seitenlinien, und alle Seitenlinien zusammen machen den Umfang der Figur aus.

30 §.

Eine einzige grade Linie allein, oder auch zwo grade Linien allein, können keine Figur umschliessen. Es kann aber gar wohl eine einzige krumme Linie den Umfang einer Figur ausmachen. Sind die Seitenlinien einer Figur alle grade Linien; so heißt sie eine **gradlinichte Figur**: wenn eine oder mehr krumme Linien ihren Umfang ausmachen; so nennt man sie eine **krumlinichte Figur**. Vermischtlinichte Figuren sind diejenigen, deren Umfang zum Theil aus graden und zum Theil aus krummen Linien besteht.

Der ganze Umfang einer gradlinichten Figur ist selbst eine Linie, die aber weder in die Classe der graden noch krummen Linien gehört. Man kann sie eine **gebrochene Linie** nennen, und hieher gehören überhaupt alle Linien, die aus graden Stücken, unter welchen Winkeln man will, zusammengesetzt sind.

Eine ähnliche Bewandniß hat es mit dem Umfange einer vermischtlinichten Figur. Sowohl dieser Umfang, als auch jede andre Linie, die aus graden und krummen Stücken zusammengesetzt ist, kann eine **vermischte Linie** heissen.

31 §.

11 F. Die Anzahl der Seiten einer Figur ist mit der Anzahl ihrer Winkel allemahl einerley. Wenn nemlich eine grade Linie BA mit einer krummen in einem Puncte B, oder ein Paar krumme Linien EF und ED, in einem Puncte E zusammen stossen: so heissen auch ABC, und DEF ebene **Winkel**. Es hat aber mit diesen Winkeln eine ganz andre Bewandniß, wie mit den gradlinichten, welches die Folge weiter erge-

ben wird. Nun schließt jede Seitenlinie AB mit der nächstfolgenden BC einen Winkel ein, und die letzte AF einen mit der nächstletzten FE, und noch einen andern mit der ersten AB. Woraus sich dann ergiebt, daß jede Figur so viele Winkel als Seitenlinien habe.

32 §.

Dieserwegen theilt man alle Figuren nach der Anzahl ihrer Winkel, oder Seitenlinien, in Classen ein, und giebt ihnen Nahmen, die von der Anzahl ihrer Winkel, oder auch ihrer Seitenlinien, hergenommen sind: woraus man leicht abnehmen wird, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Figuren, oder Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. f. sind. Figuren, die mehr als vier Seitenlinien haben, pflegt man überhaupt Vielecke oder Polygone zu nennen. Man nennt sie schlechthin Dreyecke, Vierecke, oder Polygone, wenn sie gradlinichte Figuren sind. Sonst aber drückt man durch die Beywörter: vermischtlinicht oder krumlinicht, zugleich die Beschaffenheit ihrer Seitenlien aus.

33 §.

Wenn ein Punct P innerhalb der Gränzen einer 11 F.
Figur liegt, und wenn man durch denselben eine grade Linie GH ziehet: so wird diese Linie, wenn man sie nach beyden Seiten gehörig verlängert, den Umfang der Figur wenigstens in zweenen Puncten schneiden. Denn sie muß sowohl auf der einen, als auch auf der andern Seite, den Umfang der Figur einmahl erreichen und sodann durch denselben durchgehen.

Ist also die Figur gradlinicht; so schneidet GH wenigstens zwo von ihren Seitenlinien (14 §). Wenn

über-

10 F. überdem die Figur ein gradlinichtes Dreyeck ist, wie in der 10 Figur, und wenn alsdenn die grade Linie GH durch die Spitze A eines Winkels in diesem Dreyeck gehet: so schneidet GH verlängert gewiß die dem Winkel A gegenüberstehende Seite.

34 §.

12 F. Die grade Linie AB ist unter allen übrigen Linien ACB, ADEB, die man zwischen eben den Puncten A und B ziehen kann, die kürzeste. Wenn auch von A nach B mehrere andere Linien ACB, ADEB u. s. f. auf einer Seite der graden Linie AB so gezogen sind, daß sie insgesammt gegen AB die hohle Seite kehren, und einander nicht schneiden, auch keine derselben entgegengesetzte Wendungen macht, wie AFGB: so sind diese Linien alle ungleich, und desto grösser, je weiter sie von der graden Linie AB abweichen. So ist hier ADEB > ACB.

10 F. Demnach sind in jedem Dreyeck ABC zwo Seitenlinien AB, BC zusammengenommen grösser als die dritte AC.

35 §.

Die Entfernung eines Orts vom andern ist der kürzeste Weg, den man nehmen muß, um von einem Orte nach den andern zu kommen. Also ist die Entfernung eines Puncts vom andern die grade Linie, die sich zwischen beyden Puncten ziehen läßt (34 §).

36 §.

13 F. Eine Kreislinie ist eine krumme Linie ABDEF, die eine Ebene so umschließt, daß alle Puncte in derselben von einem gewissen Punct C in dieser Ebene gleich weit entfernt sind. Dieser Punct C heißt des

Krei-

Kreises Mittelpunct und die ebene Figur, welche von der Kreislinie begränzt wird, die Kreisfläche. Dieser Kreisfläche Umfang oder Peripherie ist also die Kreislinie.

Jede grade Linie, die man vom Mittelpunct C bis zu einem Punct D des Umfangs zieht, heißt ein Halbmesser des Kreises (radius): also sind alle Halbmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß. Das Stück der Kreisfläche AFBC, so zwischen zweenen Halbmessern AC, BC und dem dazwischen fallenden Bogen AFB enthalten ist, wird ein Ausschnitt des Kreises (sector) genannt.

37 §.

Eine grade Linie AB von einem Punct A in der 13 F.
Kreislinie zum andern B, heißt eine Sehne, und die beyden Stücke der Kreislinie AFB, AEDB, nennt man die der Sehne *AB* zugehörige Bogen. Das Stück der Kreisfläche zwischen der Sehne AB und einem ihrer Bogen AFB, oder AEDB, wird ein Abschnitt (segmentum) des Kreises genannt.

Eine Sehne wie AD, die durch den Mittelpunct C geht, heißt des Kreises Durchmesser. Jeder solcher Durchmesser ist doppelt so groß, als des Kreises Halbmesser und eben deswegen sind auch alle Durchmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß.

38 §.

Man nimmt es in der Geometrie als eine mögliche Voraussetzung an, wenn der Mittelpunct *C*, und der Halbmesser *CA* eines Kreises gegeben sind, daß man aus diesem Mittelpunct mit diesem Halbmesser den Kreis beschreiben könne.

13 F. Würde die grade Linie CA um den Punct C rund herum gedrehet, bis sie wieder in die vorige Lage gekommen: so würde ihr äusserster Punct A eine Linie beschreiben (9 §.), worinn alle Puncte von C gleich weit entfernt seyn müßten, weil A von C immer gleich weit entfernt bliebe. Dies würde also die Kreislinie seyn, und die Ebene, worüber CA fortgeführet ist, die Kreisfläche (36 §.). Auf dieser Betrachtung gründet sich die Art, wie man in der Ausübung vermittelst des bekannten Cirkel-Instruments die Kreislinie verzeichnet.

39 §.

13 F. Jeder Punct G, dessen Entfernung GC vom Mittelpunct des Kreises kleiner ist, als des Kreises Halbmesser, liegt innerhalb der Kreisfläche: und jeder Punct H, dessen Entfernung HC vom Mittelpunct grösser als der Halbmesser ist, liegt ausserhalb der Kreisfläche. Denn CG verlängert trift die Peripherie in D, und G liegt auf dem Halbmesser, der allemahl ganz in der Kreisfläche liegt. Wenn aber CH grösser als der Halbmesser CD ist: so geht die Kreislinie durch D, und H bleibt ausserhalb dieser Gränze der Kreisfläche liegen.

Jede grade Linie MN also, die durch einen Punct G gezogen ist, dessen Entfernung vom Mittelpunct kleiner, als der Halbmesser ist, muß die Kreislinie wenigstens in zweenen Puncten schneiden (33 §.). Eben dies gilt demnach auch vom Durchmesser eines Kreises.

40 §.

13 F. Ein Durchmesser AD aber kann die Kreislinie auch nicht in mehr denn zweenen Puncten A und D schneiden

den. Wäre H ein dritter Durchschnittspunct: so müßte CD = CH seyn (37 §.), welches falsch ist. Auf einer Seite des Puncts C können in der graden Linie AD nicht zweene unterschiedene Puncte D und H in gleicher Entfernung liegen (18 §.).

Dafern C der Mittelpunct eines Kreises AFBE ist; so kann kein andrer Punct G in der Kreisfläche von allen Puncten des Umfangs gleich weit entfernt seyn. Denn die grade Linie durch C und G ist ein Durchmesser, und schneidet die Kreislinie nur in A und D. Es wird aber CA = CD (36 §.) und GA > CA, also auch GA > CD: weil überdem CD > GD, so ist GA > GD.

Das Stück GA ist unter allen graden Linien, die man von G bis an die Kreislinie ziehen kann, die größte, und GD unter allen die kleinste. Es sey GE eine solche Linie: so ziehe man CE, und es ist CG + CE > GE (34 §.), oder CG + CA > GE, d. i. GA > GE. Weil aber CE < CG + GE und CE = CD: so ist CD < CG + GE, folglich CD − CG < GE (28 §. R.), oder GD < GE.

41 §.

Jeder Durchmesser *AD* theilt die Kreisflä- che sowohl, als die Kreislinie in zwey gleiche Stücke, die man Halbkreise nennet. 13 F.

Beweis. Man stelle sich vor, es werde AFBD um AD herum gedrehet, und das Stück AFBD auf AED gelegt, so daß die Linie AD ungeändert bleibt: so fällt jeder Punct B auf einen zugehörigen Punct E. Denn man ziehe BC, und es sey DCE = DCB: so fällt CB in CE, und B in E (18 §.). Also paßt der Bogen AFBD auf dem Bogen AED, die Fläche

ACDBF auf der Fläche ACDE (16 §.), und sowohl beyde Bogen, als auch beyde Flächen, sind gleich groß (17 §.).

Wenn demnach eine Kreislinie bey A und D in zweene gleiche Theile getheilt ist, und man ziehet AD: so ist AD ein Durchmesser. Denn wäre dies nicht, so müßte der Mittelpunct ausser AD irgendwo in c liegen, und denn könnte man Ac ziehen. Dies wäre nun ein Durchmesser, der die Kreislinie nochmahl in *d* trift, und überdem wäre der Bogen AE*d* ▷ AED. Da nun AED = ABD seyn soll; so wäre AE*d* ▷ ABD: weil ferner AB*d* = AE*d* seyn müßte, vermöge des erwiesenen Satzes; so wäre AB*d* ▷ ABD, welches nicht seyn kann.

42 §.

14 F. Wenn auf einer Linie AE irgendwo ein Punct B gegeben ist: so kann man vermittelst der Kreislinie allemahl ein Stück von dieser Linie abschneiden, das in dem gegebenen Punct B anfängt, und eben so groß ist, als eine andre gegebene Linie F. Denn man nehme B für den Mittelpunct, die Linie F aber für den Halbmesser, und verzeichne eine Kreislinie (38 §.): so schneidet diese die grade Linie AE nur in zweenen Puncten C und D (40 §.), und nun ist sowohl BC, als auch BD = F (36 §.).

Auf eben die Art addirt man eine grade Linie F zu einer gegebenen AB, oder subtrahirt jene von dieser, wenn F ◁ AB ist: denn es wird AC = AB + BC = AB + F, und AD = AB − BD = AB − F.

43 §.

14 F. Wenn ein Punct P innerhalb, und ein andrer Q ausserhalb der Fläche einer Figur GDHC liegt, durch P und

P und Q aber der Umfang einer andern Figur LMNO läuft: so schneiden sich die Peripherien beyder Figuren wenigstens in zweenen Puncten, und der einen Figur Umfang fällt zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb der andern Figur. Ein Punct P, welcher den Umfang der Figur beschreibt, indem er durch LMNO fortgeht, muß wenigstens zweymahl durch die Peripherie der Figur GDHC durchgehen, einmahl wenn er von P durch L und M nach Q gehet, und das andre mahl, wenn er von Q durch N und O nach P zurück kommt.

Dies muß also auch richtig seyn, wenn beyde Figuren Kreise sind.

44 §.

Wenn man mit zwoen Seiten *AC* und *BC* eines Dreyecks *ABC* Kreislinien beschreibt, deren Mittelpuncte *A* und *B* die Endpuncte der dritten Seitenlinie sind; so schneiden diese Kreise einander. 15 F.

Beweis. Jeder Kreis schneidet die grade Linie AB zweymahl, und nicht mehr (40 §.), der eine in F und G, der andre in E und H. Nun hat man $AE = AC$, und $BF = BC$, auch überdem $AB < AC + BC$ (34 §.): also $AB < AE + BF$, und $AB - BF$ oder $AF < AE$. Demnach liegt F in der Fläche des Kreises CED (39 §.). Wenn nun AB verlängert den Kreis CED zum zweyten mahl in G trift; so ist $AG = AB + BC$, also $AG > AC$ (34 §.): folglich liegt G ausserhalb des Kreises CED, (39 §.) und beyde Kreise schneiden einander (43 §.).

45 §.

Kreislinien und Kreisflächen sind gleich groß, wenn ihre Halbmesser gleich groß sind. 16 F.

Beweis. Wenn man die eine Kreisfläche so auf die andre legt, daß beyde Mittelpuncte zusammenfallen; so fällt in die Augen, daß auch beyde Peripherien auf einander fallen müssen. Wenn nemlich CA, FD ein Paar Halbmesser sind, und der Winkel EFD = BCA ist; wenn ferner F auf C und FD auf CA gelegt wird: so fällt D in A, und FE in CB, imgleichen E in B (18 §.). Demnach fällt jeder Punct der einen Peripherie auf einen damit zusammengehörigen Punct der andern, und die Kreislinien sowohl, als auch die Kreisflächen, passen auf einander (16 §.)

46 §.

17 F. Kreislinien, die mit verschiedenen Halbmessern CA, CE aus einerley Mittelpunct C beschrieben sind, heissen Concentrische Kreise, so wie alle Kreise, die verschiedene Mittelpuncte haben, Eccentrische Kreise genannt werden.

Concentrische Kreislinien können einander nicht schneiden, auch sonst in keinem einzigen Punct zusammenstossen. Widrigenfalls würde die grade Linie von dem gemeinschaftlichen Punct bis zum Mittelpunct gezogen sowohl des einen, als auch des andern Kreises Halbmesser seyn, und beyde Kreislinien würden völlig zusammen fallen (45 §.)

Kreisflächen sind ungleich groß, wenn die Halbmesser ungleich sind, und der kleinere Halbmesser giebt einen kleinern Kreis, als der grössere. Gleiche Kreise haben also gleiche Halbmesser, und gleiche Durchmesser.

Wenn ein Paar Kreislinien einander schneiden, oder sonst auf irgend eine Art zusammenstossen; so sind es Eccentrische Kreislinien.

Geht eine Kreislinie durch zweene Puncte C und 15 F.
D einer andern, und man zieht zwischen ihren Mittelpuncten A und B eine grade Linie AB: so kann diese durch keinen von beyden Durchschnittspuncten gehen. Wäre ACB eine grade Linie: so wäre AD + BD > AC + BC (34 §.), welches nicht seyn kann, weil AD = AC, und BD = BC ist (36 §.). Demnach wird AB die Seite eines Dreyecks wie ACB oder ABD im 44 §., und ein Kreis fällt zum Theil innerhalb, zum Thei! ausserhalb des andern.

47 §.

Eine Kreislinie berühret die andre, wenn beyde zwar zusammen stossen, übrigens aber der eine Kreis entweder ganz ausserhalb, oder ganz innerhalb des andern fällt. Im ersten Fall berührt einer den andern von aussen, im andern Fall von innen.

Dergleichen Kreislinien sind also allemahl eccentrisch (46 §.), und die Berührung kann nur in einem Puncte geschehen. Denn gäbe es in beyden zweene gemeinschaftliche Puncte: so schnitten die Kreise einander (46 §.).

48 §.

Es sind zweene Puncte *A* und *B* gegeben, 18 F.
man soll aus ihnen, als Mittelpuncten, ein Paar Kreise beschreiben, die sich von aussen berühren.

Aufl. Man ziehe diese Puncte mit einer graden Linie AB zusammen, nehme nach Gefallen zwischen A und B einen Punct C auf dieser Linie, und beschreibe mit den Halbmessern AC und BC ein Paar Kreise CKE und CFD: diese werden einander in C, und zwar von aussen berühren.

Beweis. Daß beyde Kreislinien durch C gehen, ist für sich klar: aber ausser C haben sie keinen Punct gemein. Denn es sey H noch ein andrer Punct in beyden Kreislinien ausserhalb der Linie AB: so kann man AH und BH ziehen, und es wird AHB ein Dreyeck, worinn AH + BH > AB ist (34 §.). Aber es muß AH = AC, und BH = BC seyn (36 §.): also wäre AC + BC > AB, welches unmöglich ist. In der Linie AB kann ein solcher Punct auch ausser C nicht liegen, weil diese Linie jede Kreislinie nur noch einmahl schneidet in D oder E. Aber es ist vermöge der Verzeichnung, weil C zwischen A und B genommen worden, nothwendig AD > AC: also liegt D ausserhalb des Kreises CKE. Eben so liegt jeder Punct F des Kreises CFD ausserhalb des andern CKE. Man ziehe nemlich AF und BF: so ist AF + BF > AC + CB (34 §.). Aber BF = CB, also AF > AC, folglich liegt F ausser CKE (39 §).

49 §.

19 F. Aus den gegebenen Puncten *A* und *B* ein Paar Kreise zu beschreiben, die einander von innen berühren.

Aufl. Nachdem man AB gezogen, und beliebig verlängert hat: so nehme man C ausserhalb A und B auf dieser Linie, und beschreibe mit den Halbmessern AC und BC die Kreise CFD und CKE: so wird der kleinere CFD den grössern CKE von innen berühren.

Beweis. Beyde Kreislinien gehen durch C und haben sonst keinen andern Punct H gemein, der ausser AB liegt. Man könnte sonst AH und BH ziehen, und es würde AB + BH > AH oder AB + BC > AH d. i. AC > AH seyn, so dem 36 §. entgegen ist.

ist. Auch in AB kann kein Punct ausser C liegen, durch welchen beyde Kreislinien durchgehen könnten. Denn AB schneidet jeden Kreis nur nochmahl (40 §.), nemlich CFD in D und CKE in E. Aber A liegt nothwendig zwischen C und E, und B auf eben der Seite von A, wo C liegt, wenn nemlich B des kleinern Kreises Mittelpunct ist. Diesemnach ist AC ▷ BC, also auch AE ▷ BD, folglich AE + AB ▷ BD, oder BE ▷ BD. Demnach liegt E nothwendig ausser CFD. Uebrigens liegt jeder Punct F des Kreises CFD innerhalb des andern CKE. Man ziehe AF und BF; so ist AF ◁ AB + BF (34 §), oder AF ◁ AB + BC: also AF ◁ AC und F liegt innerhalb CKE (39 §.).

50 §.

Wenn zweene Kreise *CFD* und *CKE* ein 18
ander in *C* berühren, es mag von innen, oder 19 F.
von aussen geschehen; so müssen ihre Mittelpuncte *A*, *B* mit dem Berührungspunct *C* in grader Linie liegen.

Beweis. Dafern der Mittelpunct des Kreises CKE nicht in der graden Linie BC liegt, und B des Kreises CFD Mittelpunct ist: so sey G des Kreises CKE Mittelpunct. Nun kann man BG und GC ziehen: so ergiebt sich ein Dreyeck BGC, und aus den Mittelpuncten B und G sind mit den Halbmessern BC und GC die Kreise CFD, CKE beschrieben. Diese Kreise schneiden einander (44 §), welches der Voraussetzung entgegen ist.

51 §.

Die Kreislinie ist unter allen krummen Linien die einzige, welche Euclides bey der Auflösung geome-

trischer Aufgaben gebraucht hat. Die alten griechischen Geometer glaubten anfangs, daß keine andre krumme Linie verdiene in der Geometri aufgenommen zu werden, und hielten dafür, daß keine Aufgabe geometrisch aufgelöset sey, bey der man andre krumme Linien, als die Kreislinie, zu Hülfe genommen habe. Ihnen kamen aber bald solche Aufgaben vor, die sie vermittelst der graden Linie und Kreislinie allein nicht auflösen konnten, und sie wurden dadurch bewogen, auch über die Eigenschaften einiger andrer krummer Linien Untersuchungen anzustellen. Jetzt nennt man denjenigen Theil der Geometrie, worin mit dem Euclides keine andre krumme Linie, als die Kreislinie bey der Auflösung der Aufgaben gebraucht wird, die Elementar-Geometrie. Der Inbegrif aller übrigen Lehren von den ausgedehnten Grössen, die sich aus den Eigenschaften der graden Linie und Kreislinie allein nicht herleiten lassen, macht die höhere Geometrie aus.

Der III. Abschnitt.

Von den Dreyecken und Parallel-Linien.

52 §.

10 F. Es ist ein Winkel *BAC* gegeben nebst zwoen graden Linien *D* und *E*; man soll aus diesen dreyen Stücken ein solches Dreyeck machen, welches den Winkel *BAC* enthält, und worin die beyden Seiten, die den Winkel *BAC* einschliessen, so groß als die gegebenen Linien *D* und *E* sind.

Aufl. Man schneide von der Spitze des Winkels A angerechnet auf dem einen Schenkel ein Stück AB = D, und auf dem andern ein Stück AC = E ab (42 §), und ziehe die grade Linie BC (9 §): so hat man das verlangte Dreyeck ABC.

Weil die Kreise, welche man braucht, die Puncte B und C zu finden, die Schenkel des Winkels auch in b und c schneiden (40 §), und weil der Winkel BAC = bAc ist (27 §): so kann man auch bc ziehen, und das Dreyeck Abc thut der Aufgabe ebensfalls ein Genüge.

53 §.

Wenn die gegebenen Seiten D und E gleich groß sind: so werden auch AB und AC gleich groß, und man erhält ein Dreyeck, das zwo gleiche Seiten hat. Ein Dreyeck von dieser Art heißt ein gleichschenklichtes Dreyeck (aequicrurum, isosceles). Die beyden gleichen Seiten desselben heissen sodann die gleichen Schenkel, und man sieht gewöhnlich die dritte, den vorigen ungleiche Seite, als die Grundlinie des Dreyecks an.

Wenn alle drey Seiten eines Dreyecks gleich groß sind: so heißt es ein gleichseitiges Dreyeck (aequilaterum, isopleuron). Die übrigen Dreyecke, die lauter ungleiche Seiten haben, nennt man ungleichseitige Dreyecke (scalena).

54 §.

Wenn zwey Dreyecke *ABC* und *DEF* einen20 F. gleichen Winkel haben, so daß $B = E$ ist, und zwo gleiche Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, die den gleichen Winkel einschliessen; so sind die Flächen dieser Dreyecke nicht allein, sondern

auch die übrigen Seiten, und die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis. Man lege das Dreyeck DEF auf ABC so, daß E auf B und EF auf BC falle: so muß F auf C, ED auf BA, und D auf A fallen (18 §). Folglich fällt DF mit AC zusammen (12 §) und das Dreyeck DEF paßt auf ABC, DF auf AC, der Winkel D auf A, und F auf C.

10 F. Also sind die beyden Dreyecke ABC und Abc in der zehnten Figur nicht der Grösse, sondern nur der Lage nach unterschieden.

55 §.

21 F. In jedem gleichschenklichten Dreyeck *ABC* sind die Winkel an der Grundlinie *ABC* und *ACB* gleich groß, die den gleichen Schenkeln *AB* und *AC* entgegen stehen.

Beweis. Man verlängere die gleichen Schenkel AB und AC unter der Grundlinie, nehme auf AB unter BC einen beliebigen Punct D, und mache AE=AD (42 §): so ist auch BD=CE (28 § R.) Nun hat man in den Dreyecken ABE und ACD den Winkel A=A, die Seite AB=AC, und AE=AD; folglich ist BE=DC und ABE=ACD, wie auch AEB=ADC (54 §). Dieserwegen hat man ferner in den Dreyecken BDC und BEC, ausser den eben erwiesenen Sätzen AEB=ADC, und BE=DC, noch CE=BD: also ist der Winkel CBE=BCD (54 §). Weil überdem ABE=ACD war; so wird ABE−CBE=ACD−BCD, (28 §. Rech.) oder ABC=ACB.

Im gleichseitigen Dreyeck sind demnach alle drey Winkel gleich groß. Denn wäre auch AB=BC: so wäre A=ACB, folglich auch A=ABC.

56 §.

56 §.

Wenn im Dreyeck *ABC* zweene Winkel 22
ACB und *B* gleich groß sind; so sind auch die 23 F.
gegenüberstehenden Seiten *AB* und *AC* gleich
groß.

Beweis. Es kann AB weder grösser, noch kleiner,
als AC seyn. Wäre AB > AC: so müste ein Theil 22 F.
von AB so groß, als AC seyn. Man setze demnach,
es sey BD = AC, und ziehe CD: so ist in den Drey-
ecken ABC und DBC der Winkel ACB = B, über-
dem BC = BC und AC = BD. Folglich müste das
Dreyeck ABC = DBC seyn (54 §), welches nicht
seyn kann.

Wäre AB < AC: so müste man AB über A hin- 23 F.
aus nach E verlängern können, bis BE = AC würde.
Man ziehe EC: so ist wiederum in den Dreyecken
ABC, und EBC der Winkel ACB = B, überdem BC
= BC, und AC = BE. Also müste das Dreyeck ABC.
= EBC seyn (54 §), welches unmöglich ist. Weil
also weder AB > AC, noch AB < AC seyn kann:
so ist nothwendig AB = AC.

Sind demnach alle drey Winkel im Dreyeck
ABC gleich groß; so ist es gleichseitig. Denn
wäre auch BAC = B; so wäre vermöge des erwiese-
nen Satzes BC = AC: also auch BC = AB.

57 §.

Eine grade Linie *CD*, welche die Grundli- 24 F.
nie eines gleichschenklichten Dreyecks *ABC* bey
D halbirt, und durch des entgegengesetzten
Winkels Spitze geht, halbirt diesen Winkel
nebst dem ganzen Dreyeck, und steht auf der
Grundlinie senkrecht.

Beweis.

Beweis Weil der Winkel A=B, und überdem AC=BC, AD=BD: so ist das Dreyeck DAC =DBC, der Winkel ACD=BCD, und ADC= BDC (54 §.). Folglich ist CD auf AB senkrecht (19 §).

25 F. Wenn demnach ein Durchmesser EF des Kreises AFBE die Sehne AB in D halbirt; so steht der Durchmesser auf AB senkrecht, und halbirt den Winkel ACB des Ausschnitts ACBE.

Zwo Sehnen AB, GH eines Kreises, die nicht beyde Durchmesser sind, und einander in D schneiden, können einander nicht gemeinschaftlich halbiren. Denn CD würde auf beyden zugleich senkrecht seyn wider den 27 §. Fiele GH in EF: so fällt von selbst in die Augen, daß DF > CF, also auch DF > CE und ferner DF > DE sey.

58.

24 F. Eine grade Linie *CD*, welche den der Grundlinie *AB* eines gleichschenklichten Dreyecks *ABC* gegenüber stehenden Winkel *ACB* halbirt, steht auf der Grundlinie lothrecht und halbirt die Grundlinie *AB*, nebst den ganzen Dreyeck *ABC*.

Auch umgekehrt: eine grade Linie, welche die Grundlinie *AB* des gleichschenklichten Dreyecks *ABC* halbirt, und auf derselben lothrecht stehet, geht durch die Spitze des der Grundlinie *AB* gegenüber stehenden Winkels *ACB*, und halbirt diesen Winkel.

Beweis 1. Weil ACD=BCD, CD=CD und AC=BC: so ist AD=BD, das Dreyeck CAD =CBD, und der Winkel ADC=BDC (54 §). Also ist CD auf AB lothrecht (19 §).

2. Wenn

2. Wenn DE die Grundlinie AB halbirt, und auf ihr senkrecht stehet, aber nicht durch C gehet: so ziehe man CD, und es wird auch CD auf AB lothrecht seyn (57 §), welches dem 21 § entgegen ist.

Ein Durchmesser CF also, der den Winkel ACB des Ausschnittes ACBE halbirt, steht auf der Sehne AB lothrecht, und halbirt diese Sehne.

Auch umgekehrt: eine grade Linie EF, welche die Sehne AB des Kreises AEBF senkrecht in D halbirt, geht nothwendig durch den Mittelpunct C, und halbirt den Winkel ACB des Ausschnites AEBC.

59 §.

Die Lage einer graden Linie AC gegen eine andre AB (2 Fig.) wird durch die Grösse des Winkels BAC bestimmt: und zwo grade Linien AB, CD, haben in einerley Ebene einerley Lage, wenn sie jede dritte grade Linie EF (42 Fig.) in derselben Ebene unter gleichen Winkeln EHD, EGB schneiden.

Zwo grade Linien, die einander schneiden, haben nicht einerley Lage: grade Linien also, die in einerley Ebene einerley Lage haben, können einander nicht schneiden.

60 §.

Wenn in einem Dreyeck *ABC* eine Seite *BC* 26 F. verlängert wird; so ist der Winkel *ACD* ausserhalb des Dreyecks so groß, als die Summe der beyden Winkel *BAC* und *ABC*, die ihm innerhalb des Dreyecks gegenüber stehen.

Beweis. Es muß möglich seyn, durch C eine grade Linie CF zu ziehen, die mit AB einerley Lage hat. Diese muß zwischen CA und CD ihre Lage erhalten, weil sie sonst mit AB zusammenliefe, wenn

sie

sie in CA, oder zwischen CA und CB fiele, (33 §.) alsdenn aber mit AB nicht einerley Lage hätte, (59 §). Wenn ferner auch AC nach G verlängert wird, so ist HCG = BAC, (59 §.) also auch ACF = BAC (27 §). Ferner ist FCD = ABC, (59 §.) also ACF + FDC, oder ACD, = BAC + ABC.

27 F. Wenn demnach von einem Punct D innerhalb der Fläche eines Dreyecks ABC nach den Endpuncten einer Seitenlinie BC grade Linien DB und DC gezogen sind; so schliessen diese einen größern Winkel BDC ein, als die übrigen beyden Seiten BA und AC. Denn es sey BD bis E verlängert: so ist BDC > DEC, und DEC > BAC, also BDC > BAC.

Wenn im gleichschenklichten Dreyeck ABC (23 Fig.) der eine Schenkel BA durch die Spitze A nach E verlängert wird; so ist der äussere Winkel EAC = ABC + ACB = 2 ABC, (55 §.), also ABC = $\frac{1}{2}$ EAC.

61 §.

24 F. Eine grade Linie von der Spitze des Winkels C, der im gleichschenklichten Dreyeck *ABC* der Grundlinie gegenüber stehet, auf diese Grundlinie perpendiculär gezogen, halbirt diese Grundlinie.

Beweis. Wenn CF auf AB senkrecht ist, und es ist nicht AF = FB: so sey AD = DB, und es wird auch CD auf AB senkrecht seyn (57 §). Also ist CFB = R = CDB, welches dem 60 § entgegen ist.

25 F. Ein Durchmesser EF des Kreises also, der auf der Sehne AB in D senkrecht stehet, halbirt die Sehne in D, und den Winkel ACB.

62 §.

62 §.

Zweene Winkel, welche im Dreyeck zwoen ungleichen Seiten gegenüber stehen, sind ungleich groß, und zwar stehet der grössere Winkel der grössern Seite, der kleinere aber, der kleinern entgegen.

Beweis. Wenn im Dreyeck ABC die Seite AC ⊳ AB ist, so sey AD = AB (12 § Rech.) und man ziehe BD: so ist der Winkel ABD = ADB (55 §). Aber ABC ⊳ ABD, also ABC ⊳ ADB. Da nun ADB ⊳ C, (60 §.) so ist ABC ⊳ C (13 §. Rech.) 28 F.

Wenn also zweene Winkel im Dreyeck ungleich sind: so steht allemahl auch dem grössern Winkel die grössere Seite, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite entgegen. Denn ist der Winkel ABC ⊳ C: so kann nicht AC = AB seyn, weil sonst ABC = C wäre (55 §). Es kann auch nicht AC ⊲ AB seyn, weil sonst ABC ⊲ C seyn müßte, wie eben bewiesen ist. Also muß AC ⊳ AB seyn, wenn ABC ⊳ C ist.

Ist D ein Punct in der Kreisfläche, der vom Mittelpunct C unterschieden ist, und man ziehet durch C und D den Durchmesser EF: so sind alle grade Linien DA, DG die man auf einer Seite des Durchmessers von D nach dem Umfange des Kreises ziehen kann, ungleich groß. Wenn überdem der Bogen GF ⊲ AF ist; so ist DG ⊳ DA. Denn man ziehe CA, CG, und AG: so ist CAG = CGA (55 §). Aber DAG ⊳ CAG, also DAG ⊳ CGA. Ueberdem CGA ⊳ DGA, also DAG ⊳ DGA und DG ⊳ DA. 25 F.

63 §.

Wenn zwo Seiten *AB* und *AC* eines Dreyecks *ARC* so groß sind, als zwo Seiten eines 29 30 F.

31 F. andern Dreyecks DEF, nemlich $AB = DE$, und $AC = DF$, überdem aber der Winkel BAC, den jene einschliessen, grösser ist, als der Winkel EDF, den die letztern einschliessen: so ist auch die dritte Seite BC des ersten Dreyecks grösser, als die dritte Seite EF des letztern.

Beweis. Wenn an DE in dem Punct D ein Winkel EDG = BAC angesetzt würde: so müßte DF zwischen DE und DG fallen, weil EDG ▷ EDF seyn soll. Man nehme DG = AC = DF, und ziehe EG: so wird EG = BC (54 §) und man hat drey Fälle zu unterscheiden.

29 F. 1) Es kann die Linie EG mit EF zusammenfallen, wie in der 29 Fig. und dann ist für sich klar, daß EG ▷ EF, folglich BC ▷ EF sey.

30 F. 2) Es kann EG unter EF fallen, wie in der 30 Fig. Ziehet man sodann noch FG, so ist EG + DG ▷ EF + DF, (34 §.) und DG = DF: also EG ▷ EF wie vorhin.

31 F. 3) Es kann EG über EF fallen, wie in der 31 F. Ziehet man wiederum FG, so ist DFG = DGF (55 §.), und DGF ▷ EGF: also auch DFG ▷ EGF. Es ist ferner EFG ▷ DFG, also EFG ▷ EGF, und EG ▷ EF (62 §.), mithin BC ▷ EF.

Wenn also zwo Seiten eines Dreyecks ABC so groß sind, als zwo Seiten eines andern DEF, nemlich AB = DE und AC = DF, überdem aber die dritte Seite BC des ersten grösser ist, als die dritte Seite EF des zweyten: so ist der Winkel BAC, welcher der grössern BC gegenüber steht, grösser als der Winkel EDF, welcher der kleinern entgegen steht. Denn wäre BAC = EDF, so müßte BC = EF seyn, (54 §) und wenn BAC ◁ EDF wäre; so müßte BC ◁ EF

seyn,

seyn, wie eben ist bewiesen worden, welches beydes wider die Voraussetzung ist. Also ist BAC ▷ EDF, wenn BC ▷ EF ist.

64 §.

Wenn die drey Seiten eines Dreyecks *ABC* so groß sind, als die drey Seiten eines andern *DEF*, nämlich *AB* = *DE*, *BC* = *EF*, *AC* = *DF*: so sind die Dreyecke selbst gleich groß, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen. 20 F.

Beweis. Weil AB = DE, AC = DF, und überdem BC = EF: so ist der Winkel BAC = EDF. Denn wäre BAC ▷ EDF, oder BAC ◁ EDF: so wäre im ersten Falle BC ▷ EF, und im zweyten Falle BC ▷ EF (63 §.), welches beydes der Voraussetzung entgegen ist. Also ist BAC = EDF, folglich das Dreyeck ABC = DEF, auch die Winkel B = E, C = F (54 §.).

Legt man das eine Dreyeck DEF auf das andre ABC so, daß E auf B, und EF auf BC fällt: so passen die Dreyecke auf einander. Deswegen kann man auf einer Seite einer graden Linie BC als einer Grundlinie nicht zwey unterschiedene Dreyecke setzen, wenn auch die übrigen beyden Seiten gleich groß seyn, und die gleichen Seiten an einerley Endpunct der Grundlinie BC liegen sollen. Diese letzte Einschränkung ist deswegen nöthig, weil DEF auf ABC nicht nothwendig passen würde, wenn man DEF verkehrt auf ABC so legte, daß F in B, und E in C fiele. Denn die Winkel B und F werden ungleich seyn, wenn AB und AC, und also auch DE, und DE ungleich sind (62 §.).

65 §.

15 F. Ein Kreis *CFDG* kann einen andern *CEDH* nicht in mehr als zweyen Puncten schneiden, und diese Puncte liegen auf verschiedenen Seiten der graden Linie *AB*, welche durch beyder Kreise Mittelpunct *A* und *B* gehet.

Beweis. In der Linie AB kann kein Durchschnittspunct liegen, weil Kreise, die durch einen Punct dieser Linie gehen, einander nur berühren (48. 49 §.). Wenn nun ein Durchschnittspunct ausser AB in C liegt: so kann auf eben der Seite von AB kein andrer Durchschnittspunct liegen. Wäre c ein solcher Durchschnittspunct: so hätte man zwey Dreyecke ABC und ABc worinn AC = Ac, und BC = Bc seyn müßte (36 §.) und diese Dreyecke fielen nicht zusammen, welches dem 64 §. entgegen ist. Nun ist aber gewiß noch ein Durchschnittspunct da (43 §.), also muß dieser auf der andern Seite von AB fallen. Wenn dies der Punct D ist: so fällt auf dieser Seite, vermöge des vorigen, wiederum kein neuer Durchschnittspunct. Demnach kann es überhaupt nicht mehr, als zweene Durchschnittspuncte geben.

66 §.

15 F. Die gemeinschaftliche Sehne *CD* zweener Kreise, die einander in *C* und *D* schneiden, wird von der graden Linie *AB*, die durch die Mittelpuncte gehet, senkrecht halbirt.

Beweis. Wenn man AC, AD, BC, BD zieht, so hat man AC = AD, BC = BD, und AB = AB: folglich ist der Winkel CAB = DAB (64 §.) Also halbirt AB den Winkel des Ausschnitts ACED, und halbirt deswegen zugleich die Sehne CD senkrecht (58 §.).

67 §.

67 §.

Es sind drey grade Linien α, β, γ gegeben, 15 F.
man soll an der gegebenen graden Linie AG ein Dreyeck setzen, dessen eine Seite $= \alpha$ ist, und sich auf dieser Linie von A nach G erstrecket. Von den übrigen beyden Seiten aber soll die, so durch A gehet $= \beta$, und die, so durch das andre Ende der Grundlinie gehet $= \gamma$ seyn, vorausgesetzt, daß jede zweene dieser Linien α, β, γ, zusammen grösser als die dritte sind.

Aufl. Man mache $AB = \alpha$ (42 §.) und verzeichne mit dem Halbmesser $= \beta$ aus dem Mittelpunct A, mit dem Halbmesser $= \gamma$ aber aus B einen Kreis: so werden beyde Kreislinien einander schneiden, und es wird auf jeder Seite von AB ein Durchschnittspunct fallen. Sind C und D diese Puncte: so kann man AC und BC, oder auch AD und BD ziehen, und man hat in beyden Fällen ein Dreyeck ACB, oder ADB, wie es verlangt worden.

Beweis. Daß AC oder $AD = \beta$, und BC oder $BD = \gamma$ sey, erhellet aus dem 36 §., und daß beyde Kreise einander gewiß schneiden, wenn jede zwo von den gegebenen Linien α, β, γ, zusammen grösser, als die dritte sind, ergiebt sich aus dem Beweise des 44. §.

Wenn zwo von den gegebenen Seiten β und γ gleich groß sind: so erhält man auf der gegebenen Grundlinie AB ein gleichschenklichtes Dreyeck, da denn jeder Schenkel β oder γ grösser, als die halbe Grundlinie seyn muß. Sind aber alle drey gegebene Seiten gleich groß: so wird das Dreyeck gleich-

seitig, welches man also auf einer jeden gegebenen Grundlinie leicht verzeichnet.

68 §.

32 F. Durch einen gegebenen Punct C auf der gegebenen graden Linie *AB* eine andre grade Linie senkrecht zu ziehen.

Aufl. Man schneide auf beyden Seiten von C ein Paar Stücke CD = CE ab (42 §.) und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DEF: so ist die durch C und F gezogene grade Linie auf AB senkrecht (57 §.).

In der Ausübung ist es nicht nothwendig, die beyden Kreise mit den Halbmessern DF und EF, welche zur Verzeichnung nöthig sind (67 §.), ganz zu zeichnen. Es dienen schon ein Paar kleine Bogen davon, den Durchschnittspunct F zu finden, den man eigentlich sucht. Dies ist auch bey den folgenden Aufgaben zu merken, wo ähnliche Verzeichnungen vorkommen.

69 §.

33 F. Einen gegebenen Winkel *ABC* zu halbiren.

Aufl. Man nehme auf beyden Schenkeln ein Paar gleiche Stücke BD = BE, und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DFE: so halbirt BF den Winkel ABC. Weil nemlich BD = BE, DF = EF, BF = BF: so ist DBF = EBF (64 §.).

70. §.

34 F. Eine grade Linie *AB* mit einer andern senkrecht zu halbiren.

Aufl. Man setze auf AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB, und halbire den der Seite AB gegen-

über

über stehenden Winkel ACB (69 §.): so steht die Linie CE, die den Winkel ACB halbirt, auf AB senkrecht, und halbirt AB (58 §.)

71 §.

Durch einen gegebenen Punct *A* einer gra- 35 F.
den Linie *AB* eine andre grade Linie zu ziehen, die mit *AB* einen gegebenen Winkel = *C* einschließt.

Aufl. Man nehme auf jedem Schenkel des gegebenen Winkels C ein Paar beliebige Puncte D und E, und ziehe DE. Man mache AF = CD, und setze auf AF ein Dreyeck AFG, so daß die an A anliegende Seite = CE, und die an F anliegende Seite = DE wird: so wird der Winkel A = C (67 §.).

Da es gleichviel ist, wo man die Puncte D und E in den Schenkeln des Winkels C nehmen will: so kann man mit einem beliebigen Halbmesser aus C einen Bogen schlagen, der diese Schenkel in D und E schneidet. Mit eben dem Halbmesser schlage man aus A einen Bogen, der AB in F schneidet. Schlägt man nun mit dem Halbmesser DE aus F einen Bogen, der den vorigen in G schneidet: so kann man durch A und G die Linie AG ziehen, welche sodann mit AB den verlangten Winkel ausmacht.

72 §.

Die Summe der drey Winkel *BAC*, *ABC*, 26 F.
ACB, im Dreyeck *ABC* ist der Summe zweener rechten Winkel gleich.

Beweis. Man verlängre eine Seite BC, so ist der Winkel ACD = BAC + ABC, (60 §.) also ACD + ACB = BAC + ABC + ACB. Ferner ist ACD + ACB = 2R, (22 §.) also BAC + ABC + ACB = 2R.

Wenn demnach ein Winkel eines Dreyecks ein rechter oder stumpfer Winkel ist: so ist jeder von den übrigen beyden ein spitzer Winkel.

Jeder Winkel im gleichseitigen Dreyeck ist $= \frac{2}{3}$ R: und wenn ein Winkel im gleichschenklichten Dreyeck $= \frac{2}{3}$ R ist, so ist das Dreyeck gleichseitig.

36 F. Wenn eine grade Linie CG auf einer andern AB senkrecht stehet: so kann von keinem Punct C der Linie CG auf AB eine andre von CG unterschiedene senkrechte Linie CH gezogen werden, weil sonst im Dreyeck CGH zweene Winkel G und H rechte Winkel wären.

Wenn eine Seitenlinie GH und ein anliegender Winkel GHD (42 Fig.) gegeben sind; so kann man aus beyden ein solches Dreyeck verzeichnen, worinn der Winkel, welcher der gegebenen Seite GH gegenüber stehet, kleiner ist, als jeder gegebene Winkel. In demjenigen Schenkel HD, dessen Länge nicht bestimmt ist, nehme man einen Punct M wo man will an, und ziehe GM. Man nehme hiernächst MN = MG, und ziehe GN, so ist GNH $= \frac{1}{2}$ GMH (60 §.). Man nehme aufs neue NO = NG, und ziehe GO, so ist GON $= \frac{1}{2}$ GNH, (60 §.) also GON $= \frac{1}{4}$ GMH. Fährt man so fort, so wird jedesmahl der Winkel an der Spitze im folgenden Dreyeck halb so groß, als er im vorigen war: mithin endlich kleiner, als jeder gegebene Winkel. (139. §. Rech.)

73 §.

36 F. Eine grade Linie *AB* kann eine Kreislinie, nicht in mehr denn zweenen Puncten schneiden, auch wenn sie nicht durch den Mittelpunct gehet.

Beweis.

Beweis. Die grade Linie AB schneide den Kreis DKE in den beyden Puncten D und E. Ist nun F ein dritter Durchschnittspunct, und $DG = \frac{1}{2}DE$, $DH = \frac{1}{2}DF$: so müssen die Puncte G und H nothwendig unterschieden seyn. Weil aber vermöge der Voraussetzung nicht nur DE; sondern auch DF eine Sehne des Kreises seyn soll: so müßte sowohl CG als auch CH auf AB senkrecht seyn (57 §), welches dem 72 § entgegen ist.

Von einem Punct C, der ausser einer graden Linie AB liegt, kann man nach AB nicht mehr als zwo gleich grosse grade Linien CD, CE ziehen. Denn wäre auch $CF = CE$: so schnitte ein Kreis, aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CE beschrieben, die grade Linie AB in mehr denn zweenen Puncten.

74 §.

Durch einen Punct *C*, der ausser einer graden Linie *AB* liegt, nach *AB* eine senkrechte Linie zu ziehen.

Aufl. Auf der andern Seite von AB, wo C nicht liegt, nehme man einen beliebigen Punct F, und ziehe die Linie CF, welche AB in H schneiden wird (14 §). Aus dem Mittelpuncte C beschreibe man mit dem Halbmesser CF einen Kreis: dieser schneidet AB, weil $CH < CF$ ist (39 §), und zwar nur in zweenen Puncten (73 §). Sind nun D und E diese Puncte; so ziehe man CD, CE, und halbire den Winkel DCE (69 §). Die grade Linie CG, welche diesen Winkel halbirt, steht auf AB senkrecht (58 §). 37 F.

Wenn eine grade Linie CH auf einer andern AB schief stehet, also mit ihr auf der einen Seite einen spitzen Winkel CHB, auf der andern einen stumpfen

Winkel CHD macht; und wenn alsdenn von einem Punct C der Linie CH auf AB eine grade Linie senkrecht gezogen wird: so muß sie auf der Seite des spitzen Winkels CHB fallen. Denn fiele sie auf der Seite des stumpfen Winkels in Cg: so hätte das Dreyeck CHg bey g einen rechten und bey H einen stumpfen Winkel, welches nicht seyn kann (72 §).

75 §.

Rechtwinklichte Dreyecke (rectangula, orthogonia) heissen diejenigen, welche einen rechten Winkel haben: alle übrige werden schiefwinklichte Dreyecke (obliquangula) genannt. Ist ein Winkel im Dreyeck stumpf; so heißt es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium), und wenn alle drey Winkel spitze sind, ein spitzwinklichtes Dreyeck (acutangulum, oxygonium). Im rechtwinklichten Dreyeck wird die Seite, welche dem rechten Winkel entgegen stehet, die Hypothenuse genannt: die übrigen Seiten aber, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die Catheti oder Perpendiculär-Seiten, wovon man gemeiniglich eine als die Grundlinie des Dreyecks ansieht.

Im rechtwinklichten Dreyecke ist die Hypothenuse, und im stumpfwinklichten Dreyecke diejenige Seite die größte, welche dem stumpfen Winkel gegenüber stehet (62 §).

Die Summe der beyden spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreyeck macht einen rechten Winkel aus. Jeder spitze Winkel im rechtwinklichten Dreyeck ist also des andern Ergänzung zum rechten Winkel.

76 §.

38 F. Unter allen graden Linien, die man von einem Punct C, der ausser der graden Linie AB liegt,

liegt, nach einen Punct in dieser Linie ziehen kann, ist die senkrechte Linie *CD* die kleinste.

Wenn ferner *E* und *F* ein paar Puncte sind, die in *AB* auf eben der Seite der Normallinie *CD* liegen: so ist allemahl die grade Linie *CF* ▷ *CE*, wenn *DF* ▷ *DE* ist.

Beweis. Eine jede solcher Linien, wie CE, CF ist im rechtwinklichten Dreyecke CDE oder CDF die Hypothenuse, und CD eine Perpendiculär-Seite. Deswegen ist allemahl CE ▷ CD, oder CF ▷ CD (75 §). Wenn aber F und E auf einer Seite des Perpendiculs CD liegen, und es ist DF ▷ DE: so ist allemahl der Winkel CEF ▷ CDE (60 §). Also CEF ein stumpfer Winkel, und CF ▷ CE (75 §).

Man kann also von C nach AB auf einer Seite der Normallinie CD nicht zwo unterschiedene gleich grosse Linien ziehen.

Ein Kreis mit dem Halbmesser CE beschrieben schneidet AB, weil CD ◁ CE ist, und zwar einmahl in E: aber der andre Durchschnittspunct G fällt nothwendig auf der andern Seite der Normallinie CD, weil CG = CE nicht mit CE auf einer Seite liegen kann.

77 §.

Wenn *CDE* ein gleichschenklichtes Dreyeck, und *CD* = *CE* ist: so ist jede grade Linie *CH* von der Spitze *C* nach der Grundlinie *DE* innerhalb des Dreyecks kleiner, als die Schenkel. Jede grade Linie *CF* aber nach der verlängerten Grundlinie ausserhalb des Dreyecks ist grösser, als die Schenkel *CD*, *CE*, sind. 36 F.

Beweis.

Beweis. Die auf DE senkrechte Linie CG fälle nothwendig innerhalb des Dreyecks (74. 72 §), und es ist CG < CD (76 §). Ferner ist allemahl CHE > R, wenn CH auf DE schief stehet (60 §.) also ist CH < CE. Eben so ist allemahl CEB > R (60 §): also CF > CE. (75 §.)

Wenn also ein Kreis die grade Linie AB in D und E schneidet; so fällt das Stück DE ganz innerhalb des Kreises. Dies gilt demnach von jeder Sehne der Kreislinie.

78 §.

39 F. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* einen gleichen Winkel haben, so daß $B = E$ ist, und zwo gleiche Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, nemlich $AB = DE$, $AC = DF$; und wenn überdem die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite *AC*, *DF* grösser, als die anliegende Seite *AB*, *DE* ist: so sind die ganzen Dreyecke *ABC*, *DEF* gleich groß, und die übrigen Seiten, nebst den Winkeln, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis. Unter den angenommenen Bedingungen ist auch $EF = BC$. Denn es sey nicht EF, sondern EG, oder $Eg = BC$: so ist DG, oder $Dg = AC$ (54 §). Also ist im ersten Falle DGF ein gleichschenklichtes Dreyeck und DE > DG (77 §), oder AB > AC wider die Voraussetzung. Wäre $Eg = BC$: so wäre DFg ein gleichschenklichtes Dreyeck und DE > DF, oder wiederum AB > AC. Demnach muß $BC = EF$ seyn: also ist auch $A = EDF$, $C = DFE$, und das Dreyeck $ABC = DEF$ (64 §).

79 §.

79 §.

Es ist ein Winkel B gegeben nebst zwoen graden Linien E und F: man soll ein Dreyeck verzeichnen, worin zwo Seiten, die den Winkel B nicht einschliessen, so groß als die gegebenen Linien E, F sind.

Aufl.. Man nehme auf dem einen Schenkel des 40
Winkels B das Stück BA = der einen gegebenen Li-41 F.
nie E, und aus dem Mittelpunct A beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der andern gegebenen Linie F gleich ist, einen Kreis: dieser wird den andern Schenkel BC des Winkels B schneiden, dafern AC grösser ist, als die Normallinie, die von A auf BC fällt.

Wenn nun F ⊳ E ist, wie in der 40 Fig. so fal-40 F.
len die Durchschnittspuncte C und D der graden Linie BC und des Kreises auf entgegengesetzten Seiten von AB. Sie können nicht auf einer Seite fallen, wie in der 41 F., weil sonst AD ◁ AB (77 §) d. i. F ◁ E seyn würde. Wenn also F ⊳ E ist; so muß man von A nach dem Durchschnittspunct C, welcher auf der Seite des gegebenen Winkels fällt, AC ziehen, und ABC wird das verlangte Dreyeck seyn.

Wenn F ◁ E ist, wie in der 41 F. so fallen beyde41 F.
Durchschnittspuncte D und C auf einer Seite von AB. Sie können nicht auf verschiedenen Seiten fallen, wie in der 40 F., weil sonst AB ◁ AD (77 §), oder E ◁ F wäre, gegen die Voraussetzung. Zieht man demnach AD oder AC: so hat sowohl das Dreyeck ABD, als auch ABC die verlangten Eigenschaften. Also kann man auf die Gleichheit zweyer Dreyecke, die einen gleichen Winkel, und zwo gleiche Seiten haben, die den gleichen Winkel nicht einschliessen,

und

und auf die Gleichheit ihrer übrigen Seiten und Winkel, nur allein in dem Falle schliessen, wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite grösser, als die anliegende ist (78 §).

Je kleiner F ist, desto näher kommen die Durchschnittspuncte D und C einander: denn desto näher müssen AD und AC der Normallinie AG rücken. Wäre F der Normallinie gleich; so würde der Kreis die Linie BC nicht mehr schneiden, sondern nur durch einen Punct G derselben durchgehen.

Wäre F kleiner, als die Normallinie von A auf BC; so könnte der Kreis die Linie BC gar nicht mehr treffen (76 §), und aus den gegebenen Stücken liesse sich kein Dreyeck verzeichnen.

80 §.

42 F. Zwo grade Linien AB, CD, die auf einer Ebene eine solche Lage gegeneinander haben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mögen auf beyden Seiten so weit man will verlängert werden, heissen parallele Linien. Demnach sind solche grade Linien, die in einerley Ebene einerley Lage haben, einander parallel. (59 §.)

Man pflegt wohl dies Zeichen # statt des Worts: parallel der Kürze wegen zu gebrauchen.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *CD* eine dritte *EF* in *G* und *H* so schneiden, daß die beyden inwendigen Winkel *EHD*, *BGF*, welche zwischen *AB* und *CD* an *EF* anliegen, zwey rechte Winkel ausmachen: so sind *AB* und *CD* parallel.

Beweis. Denn stiessen sie nach B und D verlängert zusammen: so würde sich ein Dreyeck ergeben,

ben, worin die beyden Winkel an der Seitenlinie GH zweene rechte Winkel ausmachten, welches dem 72 § zuwider ist. Weil nun AGF + BGF = 2 R = EHD + EHC (22 §): so ist AGF + BGF + EHD + EHC = 4 R, folglich auch AGF + EHC = 2 R (28 § Rech.) Demnach können AB und CD aus eben der Ursache, auch nach A und C verlängert nicht zusammen stossen.

Zwo grade Linien also, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

81 §.

Durch einen gegebenen Punct G eine grade 42 F. Linie zu ziehen, die mit einer andern gegebenen graden Linie *CD* parallel läuft.

Aufl. Man nehme in CD einen Punct H und ziehe durch G und H die grade Linie EF. Durch G ziehe man AB unter dem Winkel EGB, oder AGF = EHD: so ist AB mit CD parallel.

Beweis. Weil EGB + BGF, oder AGF + BGF = 2 R: so ist auch EHD + BGF = 2 R, wenn EGB oder AGF = EHD gemacht ist: und deswegen ist AB ∥ CD (80 §).

Die Winkel AGF, und EHD, pflegte man die Wechselswinkel zu nennen, so wie EGB der äussere und EHD der innere heißt.

82 §.

Wenn zwo grade Linien *ab*, *CD* von einer 42 F. dritten *EF* in *G* und *H* so geschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel *EHD* + *bGF* < 2 *R* ist; so schneiden *ab* und *CD* einander, wenn sie nach *b* und *D* zu gehörig verlängert werden.

Beweis.

Beweis. Man mache den Winkel EGB = EHD, so hat man EGB + BGF = 2 R, (22 §) also auch EHD + BGF = 2 R. Vermöge der Voraussetzung ist EHD + bGF < 2 R, also EHD + bGF < EHD + BGF, und bGF < BGF. Demnach liegt Gb zwischen GB und GF, und BGb ist ein gegebener Winkel. Man nehme GH und den anliegenden Winkel GHD als gegebene Stücke an, und zeichne über GH ein Dreyeck, worin Winkel GOH, welcher der Seite GH gegenüber liegt, kleiner als BGb ist: (72 §) alsdenn hat man EHD = GHD, und BGF = HGO + BGO, also EHD + BGF = GHD + HGO + BGO. Vorhin war EHD + BGF = 2 R, GHD + HGO + BGO = 2 R. Aber auch GHD + HGO + GOH = 2 R: (72 §), mithin GHD + HGO + BGO = GHD + HGO + GOH, und daraus folgt BGO = GOH. Vermöge der Voraussetzung ist GOH < BGb, also auch BGO < BGb. Demnach liegt nun Gb zwischen den Schenkeln GH und GO des Winkels HGO, und eben darum muß Gb verlängert mit HO oder HD zusammen laufen. (33 §.)

Euclides hat diesen Satz in seinem ersten Buch unter den Grundsätzen ohne Beweis vorgetragen: auch ist man sonst gewöhnlich in Schwierigkeiten gerathen, wenn man einen strengen Beweis des Satzes zu geben bemühet war. Man lernet die Geschichte dieser Bemühungen vollständig kennen aus der im Jahr 1763 unter dem Vorsitz des Herrn Hofrath Kästner vom Herrn Georg Simon Klügel (jetzigem Professor der Mathem. in Helmstädt) zu Göttingen vertheidigten akademischen Streitschrift: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. M. s. auch im zweyten Stück

des

des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oeconomie des Herrn Professor Hindenburgs Aufsatz über die Schwürigkeit bey der Lehre von den Parallellinien. Eben daselbst ist des Lehrsatzes eine v. S. 165. 166. für den zweyten Fall noch Erinnerungen unterworfen, wovon vermuthlich im dritten Stück mehreres vorkommen wird.

83 §.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *CD* parallel sind, und von einer dritten *EF* in *G* und *H* geschnitten werden; so ist die Summe der beyden inwendigen Winkel $EHD + BGF = 2R$. 42 F.

Beweis. Wäre EHD + BGF < 2 R: so stiesse AB mit CD nach B und D verlängert zusammen, (82 §.) wider die Voraussetzung. Wäre EHD + BGF > 2 R; so ist auch überdem AGF + BGF + EHD + EHC = 4 R (22 §.): also wäre AGF + EHC < 2 R, und AB stiesse mit CD nach A und C verlängert zusammen, welches ebenfalls mit der Voraussetzung streitet, weil AB mit CD parallel seyn soll. Demnach ist unter dieser Bedingung EHD + BGF = 2 R.

84 §.

Wenn $EHD + BGF$ in der vorigen Zeichnung $= 2R$ ist; so ist auch $EHD = AGF$, oder die Wechselswinkel sind gleich, und überdem ist der äussere Winkel EGB dem innern EHD gleich. 42 F.

Beweis. Es ist BGF + AGF = 2 R (22 §.): wenn also EHD + BGF = 2 R; so ist EHD + BGF = BGF + AGF, folglich EHD = AGF. Ferner ist AGF = EGB (27 §.), also auch EGB = EHD.

Werden demnach zwo parallele Linien AB, CD von einer dritten in G und H geschnitten: so sind auch die Wechselswinkel EHD und AGF gleich, und der äussere Winkel EGB ist dem innern EHD gleich (83 §.).

Parallele Linien haben in einerley Ebene einerley Lage, weil sie jede grade Linie in derselben Ebene unter gleichen Winkeln schneiden. (59 §.).

85 §.

42 F. Durch einen Punct *G*, der ausser der graden Linie *CD* liegt, kann man nicht zwo verschiedene grade Linien *AB* und *ab* ziehen, die beyde zugleich mit *CD* parallel sind.

Beweis. Wäre AB # CD, und zugleich *ab* # CD; so könnte man durch G und einen Punct H in CD die grade Linie EF ziehen, und es wäre EHD + BGF = 2 R = EHD + *b*GF (83 §.): also FGF = *b*GF, welches nicht seyn kann.

Eine grade Linie *ab*, die eine von zwoen Parallelen AB schneidet, wird wenn man sie verlängert, auch die andre CD mit der vorigen unter einerley Winkel schneiden. Wenn also eine grade Linie EG auf einer von zwoen Parallelen AB senkrecht stehet; so wird sie verlängert, auch die andre CD senkrecht schneiden.

Zweene Winkel EGB und KDL sind gleich groß, wenn ihre Schenkel, GE, DK, und GB, DL, die in Absicht der Spitzen G und D nach einer Seite zu liegen, parallel sind. Denn EG und LD verlängert schneiden einander in H, und dann ist EGB = EHD = KDL (84 §.).

86 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, die mit einer 43 F.
dritten *EF* parallel laufen, sind auch unter
sich parallel.

Beweis. Durch einen Punct I in AB, und ei-
nen andern K in CD, ziehe man GH, diese Linie wird
auch EF in L schneiden (85 §.), so daß GIB = GLF
und GKD = GLF (84 §.) ist. Also ist ferner GIB
= GKD, und AB # CD (81 §.).

87 §.

Die drey Winkel eines Dreyecks zusammen betra-
gen so viel, als die drey Winkel eines jeden andern
zusammen genommen (72 §.). Wenn also zwey
Dreyecke einen gleichen Winkel haben; so ist die
Summe der beyden übrigen in dem einen so groß,
als in dem andern. Sind zwey Winkel des einen
so groß, als zwey Winkel des andern: so ist der drit-
te Winkel in beyden gleichfalls von einerley Grösse.

88 §.

Durch einen Endpunct *A* einer gegebenen 44 F.
graden Linie *AB* eine andre auf *AB* senkrecht
zu ziehen.

Aufl. Man nehme AD von willkührlicher Grösse,
und setze auf AD, als einer Grundlinie das gleich-
schenklichte Dreyeck ACD. Aus dem Mittelpunct
C mit dem Halbmesser CA verzeichne man einen
Kreis, der durch D gehen wird. Man ziehe den
Durchmesser DE: so ist eine grade Linie durch A und
E auf AB senkrecht.

Beweis. Es ist ACD = AEC + CAE (72 §.)
= 2 CAE (55 §.) und aus eben der Ursache ACE =

2 CAD. Also 2 (CAE + CAD) = ACD + ACE = 2 R. Folglich CAE + CAD = EAD = R.

89 §.

Die Summe aller Winkel einer gradlinichten Figur beträgt zweymahl so viele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger 4 rechte Winkel.

45 F. Beweis. Eine gradlinichte Figur, wie ABCDE läßt sich vermittelst der Diagonallinien AC, AD, in so viele Dreyecke ABC, ACD, ADE, eintheilen, als die Figur Seitenlinien hat, weniger zwey. Alsdenn ist die Summe aller Winkel der Figur einerley mit der Summe aller Winkel dieser Dreyecke zusammen genommen. Wären es eben so viele Dreyecke als die Figur Seiten hat, und wäre die Anzahl dieser Seiten = n; so wäre die Summe aller Winkel = $2n$. R (72 §.). Hievon gehen aber 2mahl 2 rechte Winkel ab: also ist diese Summe = $2n$. R — 4R = $(2n-4)$ R.

46 F. Wenn die Figur einwärts gehende Winkel (angles rentrants) hat, wie in der 46 F. ABC ist: so muß man nicht den Winkel, welcher auswärts der Figur liegt, und kleiner als zwey rechte Winkel ist, rechnen, sondern denjenigen, welcher nach innen gekehrt ist, und hier mehr als zwey rechte Winkel ausmacht, denn der Beweis gilt von den Winkeln, deren Oefnung einwärts liegt.

Die Summe aller Winkel solcher Figuren also, die gleichviel Seiten haben, ist in der einen so groß, als in der andern.

Ueber die Möglichkeit der in dem Beweise angenommenen Voraussetzung findet man umständlichere

Betrach-

Betrachtungen, nebst noch einigen hiemit verwandten Lehren, im 1sten Theil der Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, im 147-151. §. der Geom. 457-462 S.

90 §.

Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* gleiche Winkel haben $B=E$, $A=EDF$, also auch $C=DFE$ (87 §.) und überdem eine gleiche Seite, die zwischen gleichen Winkeln liegt, $BC=EF$: so passen die Dreyecke auf einander, und die Seiten sind gleich groß, die den gleichen Winkeln gegenüberstehen. 48 F.

Beweis. Unter den festgesetzten Bedingungen muß $AB=DE$ seyn. Denn widrigenfalls sey EG, oder $Eg=AB$. Im ersten Falle ist $A=EGF$ (54 §.), und überdem $EGF \rhd EDF$ (60 §.): also $A \rhd EDF$ wider die Voraussetzung. Im zweyten Fall ist $EgF=A$ (54 §.), und $EgF \lhd EDF$ (60 §.), also $A \lhd EDF$, ebenfalls wider die Voraussetzung. Demnach ist $AB=DE$, die Dreyecke passen auf einander, und es ist auch $AC=DF$ (54 §.).

91 §.

Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* bey *B* und *E* rechtwinklicht sind, und eine gleiche Perpendiculärseite haben, $CB=EF$, in eben diesen Dreyecken aber die spitzen Winkel *ACB* und *F*, die an den gleichen Seiten anliegen, ungleich sind: so sind die entgegengesetzten Seiten *AB* und *DE* auch ungleich, und es stehet die grössere Seite dem grössern Winkel gegenüber. 49 F.

Beweis. Es sey ACB > F, und man mache GCB = F: so muß CG zwischen CA und CB fallen, weil GCB < ACB ist, und CG muß AB zwischen A und B schneiden, so daß AB > GB wird. Es ist aber GB = DE (90 §.), also auch AB > DE.

92 §.

50 Es ist eine grade Linie BC nebst zweenen
51 F. Winkeln α und β gegeben, die beyde zusammen kleiner, als zweene rechte Winkel sind; man soll ein Dreyeck verzeichnen, worinn eine Seite $= BC$, ein Winkel $= \alpha$, und ein andrer $= \beta$ ist.

Aufl. Dies läßt sich auf zweyerley Art bewerkstelligen. Denn man kann das Dreyeck so verzeichnen, daß beyde Winkel α und β an der Seite BC anliegen, man kann es auch so verzeichnen, daß einer von diesen beyden Winkeln der Seite BC gegenüberstehet.

50 F. Setzt man an BC bey B den Winkel $ABC = \alpha$, und bey C den Winkel $ACB = \beta$: so schneiden AB und AC einander, oberhalb BC (82 §.), und es ergiebt sich ein Dreyeck ABC, welches die verlangten Eigenschaften hat.

51 F. Soll β der Seite BC gegenüber stehen: so verfahre man so. Nachdem $ABC = \alpha$ gemacht worden, mache man $ABD = \beta$ und verlängere BC durch B nach E: so erhält man den Winkel $EBD = \gamma$, welcher mit $\alpha + \beta$ zweene rechte Winkel ausmacht (22. §.). Man mache nun $BCA = \gamma$: so werden BA und CA zusammen stoßen, weil $\alpha + \gamma < 2R$ ist, und man wird ein Dreyeck ABC erhalten, worinn $A = 2R - (\alpha + \gamma)$ (87 §.) $= \beta$ ist.

93 §.

93 §.

Weil die Entfernung eines Orts vom andern überhaupt der kürzeste Weg ist, der von einem Ort zum andern führt (35 §.); so ist die Entfernung eines Puncts C von einer graden Linie AB mit derjenigen 38
graden Linie einerley, die man von C auf AB senk- 52 F.
recht ziehen kann (76 §.). Wenn also von einem Punct E der graden Linie AB nach einer andern CD die grade Linie EF senkrecht gezogen wird; so ist EF die Entfernung der graden Linie AB an der Stelle E von CD.

94 §.

Parallele Linien *AB*, *CD* sind durchgängig 52 F.
gleichweit von einander entfernt.

Beweis. Es sey EF die Entfernung des Puncts E der Linie AB von CD: so ist die Entfernung GH eines jeden andern Puncts G von CD, ebenfalls = EF. Denn man ziehe EH: so ist der Winkel GEH = EHF (84 §.), und weil auch EF # GH (80 §.): so ist der Winkel EHG = FEH (84 §.). Ueberdem ist EH = EH, also in den Dreyecken EFH und EHG die Seite GH = EF (90 §.).

95 §.

Wenn zwo Entfernungen *EF*, *GH* einer 52 F.
graden Linie *AB* von einer andern *CD* gleich groß sind: so sind die Linien *AB*, *CD* parallel, und alle ihre Entfernungen von einander gleich groß.

Beweis. Ziehet man EH, so ist EHG = FEH, weil EF # GH ist. Ueberdem wird vorausgesetzt, es sey EF = GH, und es ist EH = EH. Demnach ist in den Dreyecken EFH und EGH (54 §.) der

Winkel EGH = EFH = R = GHF, und AB # CD (80 §.). Also sind alle übrige Entfernungen eben so groß (94 §.).

Alle Puncte, E, G, L u. s. f. die von einer graden Linie CD gleichweit entfernt sind, liegen in grader Linie. Denn es sey EF = GH = LK, und diese Linien auf CD senkrecht; so wird die grade Linie durch E und G mit CD parallel seyn. Gienge nun die grade Linie EG nicht auch durch L, so müßte sie doch die Normallinie LK schneiden (85 §.). Nun mag der Durchschnittspunct I unterhalb L, oder oberhalb L liegen: so wird im ersten Fall IK < LK und im andern Fall IK > LK; also entweder IK < GH, oder IK > GH seyn, welches beydes gegen den erwiesenen Satz ist.

Der IV. Abschnitt.

Von den Parallelogrammen und ihrer Vergleichung, sowohl untereinander selbst, als auch mit den Dreyecken.

96 §.

53 F. Ein Viereck ABCD, worinn jede zwo entgegengesetzte Seiten AB, und CD, imgleichen AD und BC parallel sind, heißt ein **Parallelogramm**. Eine grade Linie wie BD, zwischen entgegengesetzten Winkelpuncten eines Vierecks, heißt eine Diagonallinie desselben.

Wenn *AD* und *BC*, ein Paar gleich grosse Parallellinien sind, und man ziehet *AB* und *CD*:

CD: so wird das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe die Diagonallinie BD: so ist in den Dreyecken ABD und BCD der Winkel ADB = DBC (84 §.) die Seite AD = BC, und BD = BD, also der Winkel ABD = BDC (54 §.), folglich AB mit CD parallel (81 §.).

97 §.

In jedem Parallelogramm *ABCD* ist die Summe zweener an einer Seite *AB* anliegenden Winkel $A + ADC = 2R$ (83 §.).

Deswegen sind jede zweene einander gegenüberstehende Winkel A und C gleich groß. Denn weil $A + ADC = 2R = C + ADC$: so ist $A = C$ (28 §. Rech.).

Wenn also ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter Winkel ist; so sind die übrigen alle auch rechte Winkel: und wenn ein Winkel schief ist; so sind die übrigen alle auch schief. Im ersten Fall heißt es ein rechtwinklichtes, und im zweyten Falle ein schiefwinklichtes Parallelogramm.

98 §.

In jedem Parallelogramm sind die entge- 53 F.
gengesetzten Seiten gleich. Auch umgekehrt: ein Viereck, worinn jede zwo entgegengesetzte Seiten gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, und man ziehet die Diagonallinie BD: so ist in den Dreyecken ABD und CBD der Winkel ADB = DBC, und ABD = BDC (84 §.). Da nun auch BD = BD: so ist AB = CD, und AD = BC (90 §.). Wenn umgekehrt in dem Viereck ABCD

die Seite AB=CD und AD=BC ist; so ist überdem BD=BD. Folglich ist in den Dreyecken ABD und BDC der Winkel ADB=DBC, und überdem ABD=BDC: (64 §.) mithin ferner AD # BC und AB # CD (81 §.).

Wenn demnach in einem Parallelogramm ABCD zwo Seiten AB, AD, die einen Winkel A einschliessen, gleich groß sind: so sind alle Seiten gleich groß.

99 §.

Ein rechtwinklichtes Parallelogramm heißt auch ein Rectangel oder Rechteck, und ein gleichseitiges Rechteck wird ein Quadrat genannt. Wenn im schiefwinklichten Parallelogramm alle Seiten gleich groß sind; so heißt es ein Rhombus, und wenn die Seiten ungleich groß sind, ein Rhomboides. Die übrigen vierseitigen Figuren führen fol-
54 F. gende Nahmen. Wenn nur zwo entgegengesetzte Seiten AD, BC parallel sind, die übrigen AB, CD aber nicht; so heißt die Figur ein Trapezium: und wenn keine Seite der entgegenstehenden parallel ist, ein Trapezoides.

100 §.

54 F. Im Trapezio ABCD sind die beyden parallelen Seiten AD, BC ungleich groß, weil das Viereck sonst ein Parallelogramm wäre (96 §.). Auch umgekehrt, wenn in einem Vierecke zwo einander gegenüberstehende Seiten AD, BC parallel und ungleich groß sind; so ist es ein Trapezium. Denn wäre es ein Parallelogramm: so wäre AD=BC (98 §.).

Wenn

Wenn die beyden parallelen Seiten AD, BC auf einer der übrigen AB senkrecht stehen; so ist einer von den übrigen beyden Winkeln ADC und BCD spitz, der andre stumpf. Denn $A+B+ADC+BCD = 4R$ (89 §.). Wenn also $A=R$, und $B=R$: so ist $ADC+BCD=2R$. Wären nun diese beyde Winkel gleich; so wäre jeder $=R$, und die Figur ein Parallelogramm (80 §.). Weil aber das der Voraussetzung entgegen ist, so ist einer spitz, der andre stumpf.

Es sey ADC der spitze Winkel: so ist die gegenüberstehende Seite $CB < AD$. Denn eine grade Linie DE, die man von D auf BC senkrecht ziehet, fällt auf der Seite des spitzen Winkels DCE (74 §). Dann ist ABED ein Parallelogramm, worinn $EB = AD$, also $BC < AD$.

Umgekehet: wenn $AD > BC$ ist, so ist der Winkel ADC spitz. Denn es sey $BE = AD$, so ist $BED = R$ (96. 97 §.), also $DCE = ADC$ ein spitzer Winkel.

101 §.

Wenn zwo Entfernungen DA, CB einer graden Linie DC von der andern AB ungleich sind: so stößt DC nach der Seite, wo die kleinste Entfernung ist, mit AB zusammen (100. 82 §.). Die Entfernungen auf dieser Seite werden immer kleiner, bis AB von DC in F geschnitten wird, und DC durch F verlängert sich nach der andern Seite von AB erstreckt: da dann umgekehrt, die Entfernungen *cb*, *da* wieder wachsen, wie sie vorher abnahmen.

102 §.

53 F. Es ist ein Winkel *DAB* nebst zwoen Seiten *E* und *F* gegeben, man soll aus diesen Stücken ein Parallelogramm verzeichnen.

Aufl. Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels AB=E, und auf dem andern AD=F. Mit dem Halbmesser AD verzeichne man aus B, und mit dem Halbmesser AB aus D Kreise: diese werden sich schneiden, weil ABD ein Dreyeck ist (44 §.). Der eine Durchschnittspunct fällt auf der Seite, wo A liegt, der andre aber auf der andern Seite von BD (65 §.). Er sey C, und man ziehe BC und CD: so ist ABCD ein Parallelogramm, weil AB=CD, und AD=BC (98 §).

In der Ausübung ist es nicht nöthig, die ganzen Kreise zu zeichnen, denn man sucht eigentlich nur den über BD fallenden Durchschnittspunct, und diesen erhält man schon durch ein Paar mäßige Bogen derselben.

55 F. Soll man auf einer gegebenen graden Linie AB ein Quadrat setzen: so bedarf man weiter keiner andern gegebenen Stücke. Man setzt auf AB durch A eine senkrechte Linie (88 §) nimmt auf derselben AD =AB, und verfährt wie vorhin: so erhält man das Quadrat ABCD.

56 F. Wenn zwo Seiten E und F gegeben sind, und man soll daraus ein Rectangel verzeichnen: so bedarf man weiter keines gegebenen Winkels. Auf einer graden Linie AB setzt man, wie vorhin, eine senkrechte Linie AD, so ist DAB der gegebene Winkel: übrigens verfährt man nach den gegebenen Regeln.

57 F. Soll man auf einer gegebenen Linie AB einen Rhombum setzen: so muß man den Winkel α wissen, den

die

die Seiten des Rhombi einschliessen sollen. Man macht den Winkel BAD = α, und AD = AB: übrigens erziebt sich der Rhombus ABCD wie vorhin.

103 §.

Zwey Quadrate ABCD, EFGH, die gleiche Sei- 58 F.
ten haben, passen auf einander, und sind gleich groß. Wenn aber die Seite AB des Quadrats ABCD kleiner als die Seite EI des Quadrats EIKL ist; so ist ABCD < EIKL: denn ABCD paßt auf ein Stück EFGH des Quadrats EIKL.

Wenn demnach umgekehrt zwo Quadrate gleich groß sind; so sind ihre Seiten gleich groß, und des grössern Quadrats Seite ist grösser, als die Seite des kleinern Quadrats.

104 §.

Wenn man im Parallelogramm eine Seite für die Grundlinie annimmt; so ist die Höhe des Parallelogramms die Entfernung der entgegengesetzten Seite von dieser Grundlinie. Nimmt man im Dreyeck eine Seite für die Grundlinie an; so ist die Höhe des Dreyecks die Entfernung der Spitze des entgegengesetzten Winkels von dieser Grundlinie.

Wenn im rechtwinklichten Parallelogramm ABCD 55
eine Seite, welche man will, z. E. AB die Grundli- 56 F.
nie ist; so ist die anliegende Seite AD, oder BC, die Höhe. Auch wenn im rechtwinklichten Dreyeck ABC der eine Cathetus BC die Grundlinie ist; so ist der 49 F.
andre AB die Höhe.

105 §.

Parallelogramme *ABCD*, und *ABEF*, die 59 F.
gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis.

Beweis. Man kann allemahl das eine ABEF so auf das andre ABCD legen, daß beyde Grundlinien zusammenfallen, wie die Figur vorstellet. Sind nun die Höhen gleich, so sind alle Puncte in CD und EF gleichweit von AB entfernt, und deswegen fallen CD und EF in einer graden Linie (95 §). Dafern nun überdem der Winkel DAB = FAB ist; so paßt ABEF auf ABCD, und beyde Figuren sind gleich groß. Wann aber die Winkel DAB und FAB nicht gleich groß sind; so muß man drey Fälle unterscheiden.

59 F. 1) Es kann F zwischen D und C fallen, wie in der 59 Fig. Nun ist DC = AB = FE, also DC — CF = FE — CF, oder DF = CE. Ferner ist AD = BC, AF = BE: also das Dreyeck ADF = BCE (64 §) und ADF + ABCF = BCE + ABCF, d. i. Pgr. ABCD = ABEF.

60 F. 2) Es kann F in C fallen, und es bleibt das Dreyeck ACD = BEF, also ACD + ABF = BEF + ABF, d. i., das Pgr. ABCD = ABEF.

61 F. 3) Es kann F auf der andern Seite von C fallen, so daß BC von AF in G geschnitten wird. Es bleibt aber noch DC = FE, also DC + CF = EF + CF, oder DF = CE, AD = BC, AF = BE, mithin das Dreyeck ADF = BCE. Ferner ADF — CGF = BCE — CGF d. i. ADCG = BGFE, und wiederum ADCG + AGB = BGFE + AGB, oder Pgr. ABCD = ABEF.

Statt eines gegebenen schiefwinklichten Parallelogramms kann man also allemahl ein rechtwinklichtes verzeichnen, das jenem gleich ist, wenn man die eine Seite des rechtwinklichten der Grundlinie, und die andre Seite der Höhe des andern gleich macht.

106 §.

Dreyecke *ABC*, *DEF* über gleichen Grund=62 F. linien, in gleicher Höhe, sind gleich groß.

Beweis. Aus den Winkeln A, D, und den Seiten AB, AC, und DE, DF verzeichne man die Parallelogramme AG und DH, die mit den Dreyecken ABC, DEF gleiche Grundlinien und Höhen haben: so ist Pgr. AG = Pgr. DH (105 §). Also $\frac{1}{2}$ AG = $\frac{1}{2}$ DH, oder das Dreyeck ABC = DEF.

Demnach ist jedes Parallelogramm doppelt so groß, als ein Dreyeck, so mit demselben gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Ist die Grundlinie eines von zweyen gleich hohen Dreyecken grösser, als die Grundlinie des zweyten: so ist das erste Dreyeck grösser, als das zweyte. Bey gleichen Grundlinien aber ist das Dreyeck grösser, als das andre, dessen Höhe die grössere ist.

Wenn demnach sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe eines Dreyecks grösser, als die Grundlinie, und Höhe eines andern Dreyecks ist; so ist das erste Dreyeck grösser, als das letzte.

107 §.

Ein rechtwinklichtes Parallelogramm zu 63 F. verzeichnen, das so groß, als ein gegebenes Dreyeck *ABC* ist.

Aufl. Nachdem man CF mit der Grundlinie AB parallel gezogen hat, theile man AB bey D in zwey gleiche Theile, setze DE auf AB senkrecht, und ziehe BF mit DE parallel: so ist DBFE das verlangte Rechteck.

Beweis. Man ziehe CD: so ist das Rechteck DBFE = 2. DBC (106 §) und zugleich ABC = 2 DBC, also DBFE = ABC.

Es könnte auch BDE einem jeden andern gegebenen Winkel gleich genommen werden, wenn das Parallelogramm schiefwinklicht werden sollte.

108 §.

64 F. Ein Rechteck zu verzeichnen, das so groß, als ein gegebenes Dreyeck *ABC* ist, und eine Seite von gegebener Grösse = *a* hat.

Aufl. Man verzeichne das Rechteck DBFE = ABC, wie im 107 §, verlängere AB nach G, mache BG = *a*, und ziehe GH # BF. Wenn nun GH in H mit EF zusammen stößt, so ziehe man HB, welche ED in I schneidet. Durch I ziehe man IK # AB, welche FB in L, und HG in K schneidet: so ist BGKL das verlangte Rechteck.

Beweis. Daß BGKL = DBFE = ABC sey, erhellet so: es ist EHI = KHI, BFH = BGH, also EHI − BFH = KHI − BGH, d. i. EFBI = BGKI. Ferner ist DBI = BIL, also EFBI − DBI = BGKI − BIL, oder DBFE = BGKL.

109 §.

Wenn ausser der gegebenen Seite auch ein Winkel gegeben wäre, und statt des Rechtecks ein schiefwinklichtes Parallelogramm verlangt würde, dessen Seitenlinien einander unter dem gegebenen Winkel schneiden sollten; so müßte man den Winkel BDE dem gegebenen Winkel gleich machen, und übrigens, wie vorhin verfahren.

110 §.

66 F. Ein Rechteck zu verzeichnen, das einer gegebenen gradlinichten Figur *ABCD* gleich ist.

Aufl. Man vertheile die Figur durch Diagonallinien in Dreyecke ABC, und ACD, und verzeichne

ein

ein Rechteck EFGH = ABC (107). Man kann auch nach dem 108 § dies Rechteck so einrichten, daß eine Seite desselben FG eine gegebene Grösse bekommt. Nun verzeichne man statt des zweyten Dreyecks ACD ebenfalls ein Rechteck *fgki* nach dem 108 § so, daß eine Seite desselben *ki* = *fg* = FG wird. Man verlängere EF nach I, nehme FI = *fi* und ziehe IK # FG: so wird FGKI = *fgki* (105 §), und das Rechteck EHKI = ABC + ACD = ABCD.

Wenn die Figur ABCD mehr als vier Seiten hätte; so würde man mehr Diagonallinien ziehen können, und mehr Dreyecke erhalten. Aber es fällt in die Augen, daß man mit jedem folgenden Dreyeck eben so umgehen könne, wie mit ACD. Man erhält also für jedes folgende Dreyeck ein neues Rechteck, welches an dem vorigen EHKI anschließt, und mit demselben ein Ganzes ausmacht. Verfährt man demnach mit allen Dreyecken so, worin die gegebene Figur sich vertheilen läßt: so erhält man endlich ein Rechteck, welches allen diesen Dreyecken zusammen genommen, also der ganzen Figur gleich ist.

111 §.

Wenn auf den dreyen Seiten *AB*, *AC*, *BC* 67 F. eines bey *A* rechtwinklichten Dreyecks *ABC* Quadrate verzeichnet sind: so ist das Quadrat *CE* auf der Hypothenuse so groß, als die Summe der Quadrate *AD* + *AL* auf den Perpendiculär-Seiten.

Beweis. Weil BAH = R = CAG: so liegt AG mit AB und AH mit AC in grader Linie (23 §). Aus der Spitze des rechten Winkels A sey AF auf der Hypothenuse BC senkrecht gezogen, und schneide die

gegenüberstehende Seite des Quadrats CE in K: so ist EF sowohl als CK ein Rechteck. Man ziehe AE und CD: so ist EF = 2 ABE und AD = 2 DBC (106 §). Aber der Winkel ABD = R = CBE, also ABD + ABC = CBE + ABC, oder DBC = ABE. Ferner ist DB = AB, und BC = BE, also das Dreyeck ABE = DBC (54 §), und 2 ABE = 2 DBC, folglich das Rechteck EF = dem Quadrat AD. Vermöge eben dieses Beweises ist das Rechteck CK = dem Quadrat AL, also EF + CK = CE = AD + AL.

Dieser Lehrsatz heißt von dem Erfinder der Pythagorische Lehrsatz, und wird in der Folge oft gebraucht werden. Weil es etwas leichtes ist, sich über jeder graden Linie ein Quadrat vorzustellen; so pflegt man die Quadrate nicht allemahl ausdrücklich in den Figuren zu zeichnen, und man bedient sich im Schreiben folgender Verkürzung. Wenn über einer graden Linie AB ein Quadrat stehen sollte, das nicht ausdrücklich gezeichnet ist; so setzt man an den Buchstaben, die diese Linie bezeichnen, oberwärts rechter Hand den Buchstab q, auf diese Art ABq. Demnach wäre in der 67 Fig. ABq = AD, ACq = AL, BCq = CE. Vermöge dieser verkürzten Ausdrücke läßt sich der Pythagorische Lehrsatz so ausdrücken: in einem bey A rechtwinklichten Dreyeck ABC ist BCq = ABq + ACq.

Es folgt hieraus, daß BCq − ACq = ABq sey, oder mit Worten ausgedrückt: im rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat eines jeden Catheti gleich der Differenz des Quadrats des andern Catheti vom Quadrat der Hypothenuse.

112 §.

Wenn in einem Dreyeck ABC, $BCq = ABq + ACq$ ist: so ist der Winkel BAC, der BC gegenüber stehet, ein rechter Winkel. 68 F.

Beweis. Man setze AD auf AB senkrecht, und mache AD=AC, ziehe BD: so ist $BDq = ABq + ADq$ (111 §) $= ABq + ACq = BCq$, also BD=BC (103 §). Demnach paßt das Dreyeck ABD auf ABC und es ist der Winkel BAD=BAC=R (64 §).

Wenn also in einem Dreyeck abc, $bcq < abq + acq$ ist: so ist der Winkel a spitz. Denn im Dreyeck ABC, worin $AB = ab$, $AC = ac$, und $BCq = ABq + ACq = abq + acq$ gemacht worden, ist A=R. Weil nun $bcq < BCq$, folglich $bc < BC$: so ist $a < A$ (63 §), also $a < R$. Auf ähnliche Art erhellet, wenn $bcq > abq + acq$ ist, daß A stumpf seyn müsse.

113 §.

Es sind die Seiten zweyer Quadrate gegeben: man soll die Seite eines Quadrats suchen, welches der Summe, oder der Differenz der vorigen gleich ist.

Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel A (88 §). Dafern nun D und E die Seiten der gegebenen Quadrate sind, deren Summe gesucht wird; so mache man AB=D, AC=E, und ziehe BC: so ist $BCq = ABq + ACq = Dq + Eq$. Sind F und E die Seiten der gegebenen Quadrate, deren Differenz gesucht wird: so nehme man AC=der kleinern Seite E, und mit dem Halbmesser F schlage man aus C einen Kreis, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels A schneidet (79 §). Ist nun B ein Durch- 69 F.

schnittspunct, so ist AB die gesuchte Seite. Denn man ziehe BC, so ist $ABq = BCq - ACq = Fq - Eq$ (111 §).

Der V. Abschnitt.

Vom Kreise, und den regulären Polygonen.

114 §.

70 F. Wenn zwo grade Linien *AB*, *AC* einander in *A* schneiden, und wenn alsdenn *DE* auf *AB* in *H*, *FG* auf *AC* in *I* senkrecht gesetzt wird: so müssen diese Normallinien einander ebenfalls schneiden.

Beweis. Dafern der Winkel BAC ein schiefer Winkel ist, so wird er entweder spitz oder stumpf seyn. Ist er spitz: so ist $BAC + AIG < 2R$, und FG schneidet AB nach B und G zu verlängert (82 §.). Ist BAC stumpf: so ist sein Nebenwinkel CAL spitz, und FG schneidet AB nach A und F verlängert. Wenn nun L der Durchschnittspunct ist; so ist der Winkel bey L in beyden Fällen spitz, weil $AIL = R$ (72 §.). Da nun bey H ein rechter Winkel ist: so hat man in beyden Fällen $H + L < 2R$, also schneiden auch FG und DE einander. Dafern endlich $BAC = R$ ist, so wird DE mit AC parallel (80 §.): also wird DE von FG vermöge des 85 §. geschnitten.

115 §.

70 F. Durch drey Puncte *A*, *B*, *C* die nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man ziehe von einem Puncte A nach den übrigen beyden grade Linien AB, AC, und halbire diese mit den senkrechten Linien, DE, FG (70 §.), welche einander irgendwo in K schneiden werden. Dann aber wird eine Kreislinie aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser AK beschrieben auch durch B und C durchgehen.

Beweis. Weil BAC < 2 R ist, so schneiden DE und FG einander irgendwo in K (114 §). Man ziehe nun AK, BK, CK: so ist AK = CK (54 §.) und aus eben der Ursache AK = BK, folglich geht die Kreislinie aus K mit dem Halbmesser AK beschrieben, durch B und C.

Durch jede drey Puncte, dafern sie nur nicht in grader Linie liegen (73 §.), läßt sich also eine Kreislinie verzeichnen, und drey solche Puncte bestimmen die Grösse und Lage des Kreises.

116 §.

Wenn die Winkel am Mittelpunct *ACB*, 71 F. *EDF*, zweener Ausschnitte *AGBC*, *DEHF* gleicher Kreise gleich groß sind: so sind ihre Bogen *AGB*, *EHF*, und die Ausschnitte selbst auch gleich groß.

Wenn dagegen der Winkel *KDE* > *ACB* ist; so ist der Bogen *EHK* > *AGB*, und der Ausschnitt *EHKD* > *AGBC*.

Beweis. Man lege den Kreis AGBL so auf den andern EHFK, daß C auf D und CA auf DE fällt: so paßt ACB auf EDF, A fällt in E, B in F, und der Bogen AGB auf EHF (45 §.). Also sind die Ausschnitte und ihre Bogen gleich groß.

Wenn aber KDE > BAC ist; so sey FDE = BCA. Alsdenn wird DF den Bogen EK zwischen E und K schneiden, so daß EK > EF, folglich auch EK > AB ist, und der Ausschnitt EHKD > AGCB.

Zwey Durchmesser also AL und BM, die sich senkrecht schneiden, theilen die Kreislinie in vier gleiche Bogen AB, BL, LM, AM, die man Quadranten der Kreislinie nennt, und die Kreisfläche in vier gleiche Ausschnitte, die Quadranten der Kreisfläche heissen.

72 F. Ein Bogen FG, aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln mit einem willkührlichen Halbmesser beschrieben, ist ein Quadrant, wenn der Winkel RAC ein rechter Winkel ist. Der Bogen HG ist grösser, als ein Quadrant, wenn DAC stumpf ist, und KG ist kleiner als ein Quadrant, wenn EAC ein spitzer Winkel ist:

Wenn also umgekehrt ein solcher Bogen ein Quadrant ist; so ist der dazugehörige Winkel ein rechter Winkel. Wenn der Bogen grösser als ein Quadrant ist; so ist der Winkel stumpf: ist aber der Bogen kleiner, als ein Quadrant; so ist der Winkel spitz.

117 §.

73 F. Einen gegebenen Kreisbogen *AFB* oder *AEB* in zweene gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man ziehe seine Sehne AB, und halbire sie vermittelst der senkrechten Linie EF: (70 §.) diese theilt den Bogen AFB in F und AEB in E in zweene gleiche Theile.

Beweis.

Beweis. Die Linie EF halbirt den Winkel ACB (59 §.), so daß ACF = BCF, und ACE = BCE: also ist AF = BF, und AE = BE (116 §.).

Eine grade Linie vom Mittelpunct auf die Sehne AB senkrecht gezogen halbirt ebenfalls die Bogen AFB und AEB (61 §.).

Demnach sind ein Paar Kreisbogen AG, BH zwischen parallelen Sehnen AB, GH, gleich groß. Denn eine Normallinie CF auf der einen steht auch auf der andern senkrecht (85 §.), und halbirt also sowohl GFH als auch AFB so, daß GF = HF, AF = BF, und folglich GF — AF = HF — BF, oder AG = BH ist.

Könnte man einen Winkel ACB in so viel gleiche Theile ACD, DCE, u. s. f., als verlangt würde, eintheilen: so würden eben die Linien CD, CE, CF u. s. f., welche den Winkel theilen, auch den Bogen AB zwischen seinen Schenkeln in eben so viele gleiche Theile AD, DE u. s. f., eintheilen. 74 F.

Wenn die Halbmesser KA, KB, KC u. s. f. eines Kreises um den Mittelpunct K lauter gleiche Winkel AKB, BKC, CKD u. s. f. einschliessen: so theilen diese Halbmesser den Umfang des Kreises in eben so viele gleiche Bogen, als Winkel um K liegen. Dafern also $BKC = \frac{4R}{n}$ ist: so ist $BC = \frac{1}{n} P$, wenn P die Peripherie des Kreises bedeutet, und n die Anzahl der gleichen Winkel um K. 89 F.

118 §.

Wenn die Ausschnitte *AGBC*, *EHFD* oder auch die Bogen *AGB*, *EHF* der Ausschnitte 71 F.

gleicher Kreise gleich groß sind: so sind auch die Winkel *ACB*, *EDF* am Mittelpunct gleich groß. Denn wären diese Winkel nicht gleich groß: so wären die Ausschnitte oder Bogen ebenfalls ungleich (116 §.) gegen die Voraussetzung.

Wenn aber $EHK > AGB$ ist: so muß der Winkel $EDK > ACB$ seyn. Denn wäre EDK $=$ ACB, oder EDK $<$ ACB: so wäre im ersten Falle EHK $=$ AGB, und im zweyten Falle EHK $<$ AGB, beydes gegen die Voraussetzung.

73 F. Ein Durchmesser EF also, der den Kreisbogen AFB in zweene gleiche Theile AF, BF theilt, halbirt den Winkel am Mittelpunct ACB, der zu diesem Bogen gehört, und deswegen halbirt er auch die Sehne AB in D, und steht auf ihr senkrecht (58 §.).

74 F. Könnte man jeden Bogen, der zwischen den Schenkeln des Winkels ACB aus dem Mittelpunct C beschrieben worden, in eine verlangte Anzahl gleicher Theile AD, DE, EF u. s. f. eintheilen: so würden die graden Linien DC, EC, FC u. s. f. durch diese Theilungspuncte bis zur Spitze C des Winkels ACB gezogen, diesen Winkel in eben so viele gleiche Theile eintheilen.

119 §.

75 F. In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Sehnen *AB*, *DE*, gleiche Bogen *AGB*, *DHE*, und zu gleichen Bogen, gleiche Sehnen.

Zur grössern Sehne *DK* aber gehört ein grösserer Bogen, *DHK*, als zur kleinern Sehne *AB*: und umgekehrt, zum grössern Bogen eine grössere Sehne, dafern die Bogen kleiner sind, als die halbe Peripherie.

Beweis.

Beweis. Man ziehe CA, CB, FD, FE, wenn C und F die Mittelpuncte sind: so hat man AC = DF, BC = EF. Ist nun überdem AB = DE: so ist der Winkel ACB = DFE, (64 §.) also der Bogen AGB = DHE (116 §.). Wenn dagegen der Bogen AGB = DHE ist, so ist der Winkel ACB = DFE, (118 §.) also AB = DE (54 §.).

Wenn DK > AB ist, so ist DFK > ACB (63 §.) und DHK > AGB (116 §.): ist aber DHK > AGB, so ist DFK > ACB, (118 §.) also DK > AB (63 §). Bey diesen letzten Vergleichungen muß man Bogen verstehen, die kleiner als die halbe Peripherie sind, weil sonst die Winkel am Mittelpunct grösser, als zweene rechte werden. Dann aber gehört umgekehrt zum kleinern Bogen eine grössere Sehne, und zum grössern Bogen eine kleinere Sehne. Denn eines kleinern Winkels Ergänzung zu vier rechten Winkeln ist grösser, als die Ergänzung eines grössern Winkels, und in den Dreyecken ACB, DFK liegen nun nicht die zu den Bogen gehörigen Winkel selbst, sondern ihre Ergänzungen zu vier rechten Winkeln, den Sehnen AB, DK, gegenüber.

120 §.

Man kann in einem Kreise DEKe leicht eine Seh- 75 F.
ne von gegebener Grösse = AB ziehen, die in einem gegebenen Punct D anfängt, dafern AB kleiner, als des Kreises DEKe Durchmesser ist. Denn ein Kreis aus dem Mittelpunct D mit dem Halbmesser AB beschrieben schneidet den Kreis DKe zweymahl in E und e, daher dann eine grade Linie von D nach E oder e gezogen die verlangte Sehne ist.

Vermittelst dieses Verfahrens schneidet man also zugleich auf der Kreislinie DEKe, einen Bogen D*he*, oder DHE ab, der so groß ist, als ein gegebener Bogen AGB von einem gleichen Kreise ABL.

121. §.

76 F. In einem Kreise sind gleiche Sehnen *AB*, *DE* vom Mittelpunct *C* gleichweit entfernt, und umgekehrt, vom Mittelpunct gleichweit entfernte Sehnen sind gleich groß.

Von ungleichen Sehnen *AB*, *DF* liegt die grössere *DF* näher beym Mittelpunct, als die kleinere *AB*, und umgekehrt: eine Sehne *DF*, die dem Mittelpunct näher liegt, ist grösser, als eine entferntere *AB*.

Beweis. Wenn CG, CH die Entfernungen der Sehnen AB, DE von C sind; so ist $AG = \frac{1}{2} AB$, und $DH = \frac{1}{2} DE$. Man ziehe CA, CD: so hat man die rechtwinklichten Dreyecke ACG, DCH, worin $CGq = ACq - AGq$, und $CHq = CDq - DGq$ (111 §). Ist also $AB = DE$, folglich $AG = DH$; so ist $EGq = CHq$ und $CG = CH$. Umgekehrt, weil $AGq = ACq - CGq$ und $DHq = CDq - CHq$: so ist $AGq = DHq$, wenn $CG = CH$, also $AG = DH$, und $AB = DE$.

Wenn aber CK die Entfernung der Sehne DF von C ist; so hat man $DK = \frac{1}{2} DF$. Ferner $CKq = CDq - DKq$, und $CGq = ACq - AGq$. Wenn also $DF \rhd AB$, folglich $DK \rhd AG$ ist; so wird $CKq \lhd CGq$, und $CK \lhd CG$. Umgekehrt ist $DKq = CDq - CKq$ und $AGq = ACq - CGq$, wenn also $CK \lhd CG$ ist; so ist $DKq \rhd AGq$, folglich $DK \rhd AG$, und $DF \rhd AB$.

122 §.

Wenn zwo Sehnen *AD*, *BD* einen Winkel *ADB* einschiessen, dessen Spitze *D* in der Kreislinie liegt, und wenn zu dem Bogen *AB* zwischen den Schenkeln dieses Winkels am Mittelpunct der Winkel *ACB* gehört: so ist *ACB* doppelt so groß, als *ADB*. 77 78 79 F.

Beweis. Man muß folgende drey Fälle unterscheiden.

1) Es kann ein Schenkel AD des Winkels ADB an der Peripherie durch den Mittelpunct C gehen, und also auf AC fallen. Nun ist ACB = ADB + CBD (87 §), und ADB = CBD (55 §): also ACB = 2ADB. 77 F.

2) Es kann der Mittelpunct C innerhalb des Winkels ADB fallen. Ziehet man nun den Durchmesser DE; so ist ACE = 2ADE, und ECB = 2EDB (1 Fall): also ACE + ECB = ACB = 2 (ADE + EDB) = 2 ADB. 78 F.

3) Es kann C ausserhalb des Winkels ADB fallen. Ziehet man wiederum den Durchmesser DE; so ist BCE = 2BDE, und ACE = 2ADE, also BCE — ACE = ACB = 2 (BDE — ADE) = 2ADB. 79 F.

123. §.

Wenn man die Sehne AB ziehet; so heißt der Winkel an der Peripherie ADB dessen Schenkel durch die Endpuncte A und B der Sehne gehen, und dessen Spitze D in den Bogen des Abschnitts fällt, dem diese Sehne zugehört, der Winkel in diesem Abschnitt, und man sagt: der Abschnitt fasse diesen Winkel. 79 F.

Alle

Alle Winkel in einerley Abschnitt sind gleich groß, denn sie sind die Hälften von einerley Winkel am Mittelpunct.

80 F. Wenn AB durch C gehet; so ist ACB = 2R, also ADB = R: demnach ist jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel.

Ein Winkel ADb in einem kleinern Abschnitt ist stumpf. Denn nun ist ABb grösser, als ein Halbkreis, und die Hälfte des erhabenen Winkel ACb > R.

Ein Winkel ADβ im grössern Abschnitt ist spitz, weil der Bogen Aβ nun kleiner, als ein Halbkreis, und $\frac{1}{2}$ ACβ < R ist.

124 §.

81 F. In einem Vierecke *ABCD*, dessen vier Winkelpuncte in einer Kreislinie liegen, sind jede zwey entgegengesetzte Winkel *ABC* + *ADC* = 2 *R*.

Beweis. Man ziehe AC, und BD: so ist ABC + BCA + CAB = 2R. Aber BCA = BDA, und CAB = CDB, also ABC + BDA + CDB = 2R. Weil ferner BDA + CDB = ADC; so hat man ABC + ADC = 2R, also auch BAD + BCD = 2R (89 §).

Um jedes Viereck von dieser Art also, worin zweene entgegengesetzte Winkel zweene rechte ausmachen, läßt sich eine Kreislinie so verzeichnen, daß sie durch
82 F. die Spitzen der vier Winkel gehet. Man verzeichne nemlich einen Kreis durch die drey Puncte A, B, C: dafern nun ABC + ADC = 2R ist; so geht dieser Kreis auch durch D. Denn fiele D in der Kreisfläche, so müßte AD verlängert die Kreislinie in F schneiden. Wenn man nun CF ziehet; so wäre AFC < ADC

(60 §.)

(60 §) und $ABC + AFC < 2R$, gegen den erwiesenen Satz. Fiele D ausser der Kreisfläche; so müßte ein Stück des Bogens AFC zwischen den Schenkeln des Winkels ADC enthalten seyn. Man nehme G in diesem Bogen, und ziehe AG, CG: so ist $AGC > ADC$ (60 §), also $ABC + AGC > 2R$, welches wiederum falsch ist.

125 §.

Eine grade Linie, die durch den Umfang eines Kreises so durchgehet, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kreisfläche fällt, heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises, so wie jede grade Linie, die den Kreis schneidet, eine Sekante desselben genannt wird.

Eine Tangente kann also nur durch einen Punct der Kreislinie gehen. Denn gienge sie durch zwey Puncte; so fiele das Stück zwischen diesen Puncten in der Kreisfläche, (77 §) also wäre die Linie keine Tangente.

126 §.

Durch einen gegebenen Punct, der entwe- 83 F.
der in der Kreislinie, oder ausserhalb des Kreises liegt, eine Tangente des Kreises zu ziehen.

Aufl. 1. Ist D in der Kreislinie gegeben, so ziehe man den Halbmesser CD, und setze durch D auf CD die grade Linie AB senkrecht (88 §). Alsdenn ist AB eine Tangente des Kreises, denn alle übrige von D unterschiedene Puncte der Linie AB sind von C weiter, als D entfernt (76 §). Also liegt AB ganz ausser dem Kreise.

2) Ist A ausser dem Kreise gegeben; so ziehe 84 F.
man die grade Linie CA, halbire sie in K und beschrei-

be

be mit dem Halbmesser KA=KC aus dem Mittelpunct K einen andern Kreis, der den vorigen in D und E schneidet. Man ziehe hierauf AB, oder AF, durch D oder E: so ist sowohl AB, als auch AF eine Tangente des Kreises. Denn wenn man CD, oder CE ziehet; so ist CDA=R, auch CEA=R (123 §), woraus wie vorhin folgt, daß beyde Linien Tangenten sind.

127 §.

83 F. Wenn eine grade Linie *AB* den Kreis in *D* berührt, und man ziehet den Halbmesser *CD*: so ist *CD* auf *AB* senkrecht.

Beweis. Wäre dies nicht; so müßte eine andre grade Linie CG von C auf AB senkrecht fallen, und dann wäre CG < CD (76 §) wider die Natur der Tangente, indem nun G in der Kreisfläche fallen müßte (39 §).

Eine grade Linie vom Mittelpuncte C auf die Tangente senkrecht gezogen, geht durch den Berührungspunct: denn sonst gäbe es mehr, als eine Normallinie, von C auf AB. Eine grade Linie durch D auf der Tangente AB senkrecht gesetzt geht durch den Mittelpunct C: denn sonst könnte man durch D auf AB mehr als eine Normallinie setzen, weil CD allemahl auch auf AB senkrecht ist.

84 F. Wenn durch A zweene Tangenten des Kreises AD und AE gehen, so ist AD=AE, und CA theilt den Bogen DE bey L in zweene gleiche Theile. Denn die Halbmesser CD und CE sind auf AD und AE senkrecht. Ueberdem ist CD=CE, CA=CA, also AD=AE, und ACD=ACE (78 §): folglich auch DL=LE (116 §).

128 §.

128 §.

Wenn zweene Kreise einander in *D* berüh- 85 F.
ren: so haben sie in *D* eine gemeinschaftliche Tangente. Denn eine grade Linie durch ihre Mittelpuncte C und E geht durch den Berührungspunct (56 §): also ist AB durch D auf CE senkrecht gesetzt, eine Tangente beyder Kreise (126 §).

Umgekehrt: Kreise, die in *D* eine gemeinschaftliche Tangente *AB* haben, berühren einander. Denn eine grade Linie durch D auf AB senkrecht gesetzt geht durch beyder Mittelpuncte (127 §): also berühren sie einander (48. 49 §).

Wenn zwo Kreislinien durch *D* gehen, und die grade Linie *AB*, welche den einen in *D* berührt, wird von *ab*, welche den andern Kreis in eben dem Punct *D* berührt, geschnitten: so schneiden die Kreise einander ebenfalls. Denn eine Normallinie DH durch D auf AB ist nun von einer Normallinie De durch D auf *ab* unterschieden. Der Mittelpunct des einen Kreises fällt in DH, der Mittelpunct des andern aber in De. Also liegen die Mittelpuncte nicht mit D in grader Linie, und solche Kreise schneiden einander (50 §).

129 §.

Wenn diese Kreise DGE und DFH einander von 85 F.
innen berühren, und der Halbmesser CD des ersten kleiner ist, als der Halbmesser ED des zweyten; so fällt DGE ganz innerhalb des Kreises DFH (49 §). Aber die Tangente AB fällt ganz ausserhalb desselben. Demnach geht der grössere Kreis DFH zwischen dem kleinern und der Tangente AB durch.

Ziehet

Ziehet man durch D eine grade Linie *ab* so, daß EDa < R wird: so schneidet diese Linie nothwendig alle Kreise, die in D einander berühren. Denn nun fällt von jedes Mittelpunct, die Normallinie auf *ab*, auf der Seite des spitzen Winkels EDa. Weil diese kleiner ist, als die grade Linie von D nach eben dem Mittelpunct gezogen; so giebt es auf dieser Seite Puncte in *ab*, die innerhalb eines jeden Kreises fallen. Auf der andern Seite ist nun DE*b* stumpf, und die Tangente DB geht zwischen D*b*, und jeden dieser Kreise durch. Man nennt nun HDF, oder EDG den Winkel des Halbkreises, GDA, oder FDA aber den Berührungs-Winkel (angulum contactus) und schließt daraus gewöhnlich die folgenden Sätze.

130 §.

Der Winkel des Halbkreises wie *HDF=HDf* ist grösser, als jeder spitze Winkel, und kleiner als jeder stumpfe Winkel.

Denn EDa mag einem rechten Winkel so nahe kommen, als man will: so fällt doch allemahl ein Stück des Bogens DF zwischen D*a* und DA.

Da der Winkel ED*b* nun stumpf ist; so mag er übrigens einem rechten Winkel so nahe, als man will, kommen: es wird doch allemahl die Tangente DB zwischen dem Bogen D*f* und der graden Linie D*b* durchgehen, also HD*f* allemahl kleiner als HD*b* seyn. Aus ähnlicher Ursache läßt sich dieser Satz behaupten.

Der Berührungswinkel *ADF* ist kleiner, als jeder gradlinichte Winkel *ADa*. Denn ADa mag so klein seyn, wie man will, so fällt noch ein Stück des Bogens DF zwischen DA und D*a*.

131 §.

131 §.

Wofern die Sätze des vor. § so, wie sie da ausgedruckt sind, ihre Richtigkeit haben: so ergeben sich daraus dem Ansehen nach allerhand sonderbare Folgen. Euclides hat diese Sätze, und seine Ausleger machen dabey allerhand Schwierigkeiten. Ein Winkel, heißt es, der kleiner, als jeder stumpfe, und grösser, als jeder spitze Winkel ist, muß ein rechter Winkel seyn: und dies hat ja auch wohl unstreitig seine Richtigkeit. Denn eine Zahl z. E. die grösser ist als jede Zahl, die kleiner als 4, und kleiner, als jede Zahl, die grösser als 4 ist, muß ja wohl selbst die Zahl 4 seyn. Also folgt aus dem 130 §, daß der Winkel des Halbkreises HDF ein rechter Winkel sey. Aber aus eben der Ursache ist auch HDG ein rechter Winkel, und überhaupt die Winkel aller Halbkreise durch D, die ihre Mittelpuncte in DH haben, sind rechte Winkel. Nun sind diese Winkel alle ungleich groß (129 §.): also sind nicht alle rechte Winkel gleich groß gegen den 21 §. Noch mehr. Ein Winkel, der kleiner, als jeder gradlinichte ist, kann kein Winkel von irgend einer Grösse mehr seyn. Eine Zahl, die kleiner als jede Zahl ist, kann doch wohl keine Zahl mehr seyn. Dennoch kann man nicht sagen, daß der Winkel ADF völlig nichts sey. Denn aus eben dem Grunde wäre auch ADG nichts. Aber ADG > ADF (129 §) und ein nichts kann nicht grösser, als das andre seyn.

132 §.

Allein ich sollte meynen, daß alle diese anscheinenden Widersprüche wegfallen müßten, wenn man nur eine gewisse Zweydeutigkeit der Worte hebt, die über diese Lehren eine solche Dunkelheit verbreitet.

36 F. Wenn ein gradlinichter Winkel EDF einem andern gradlinichten Winkel BAC gleich ist; so paßt einer auf dem andern, und umgekehrt (18 §.). Das heißt, wenn die Spitze des einen D auf der Spitze des andern A liegt, und der eine Schenkel DF auf AC; so liegt der andre Schenkel DE auf AB. Es liegen die beyden Schenkel des einen Winkels völlig auf den beyden Schenkeln des andern, und dies rührt davon her, weil in jedem alle Theile einerley Lage gegen den andern Schenkel haben. Wenn demnach durch A eine dritte grade Linie AI gehet, die von AB und AC unterschieden ist; so fällt sie entweder ganz zwischen AB und AC in Ai, oder ganz ausserhalb diesen Schenkeln. Das ist die Ursache, warum man sagen muß, es sey IAC ▷ BAC und iAC ◁ BAC.

Aber man setze, durch G sey die grade Linie GH gezogen, die mit GB selbst den Winkel BGH macht, und man wollte fragen: wie groß ist der Winkel HAC, den die gebrochne Linie HGA mit AC macht? Man müßte ohne Zweifel antworten: Nicht die ganze Linie HGA macht mit AC einerley Winkel; sondern das Stück AG den Winkel GAC, das Stück HG aber auf eben der Seite einen grössern Winkel HgC. Frägt man also: was macht HGA mit AB für einen Winkel? so kann man wiederum nicht anders, als so antworten: nicht die ganze Linie HGA macht mit AB einerley Winkel; sondern das Stück GA gar keinen, HG aber den Winkel HGB.

Man ziehe nun GK so, daß BGK ▷ BGH wird, und frage: was macht KGA mit AC für einen Winkel? Ist wohl ein Gedanke dabey, wenn man antworten wollte, es sey der Winkel KAC ▷ HAC, oder

KAc

KAc ◁ HAc. Versteht man durch HAc, KAc, oder HAC, KAC die Winkel, welche das Stück AG mit AC macht: so sind HAC, KAC, und HAc, KAc gleich groß. Versteht man aber die Winkel, welche KG, HG mit AC machen; so ist KAC ▷ HAC und KAc ◁ HAc.

Wenn die gebrochene Linie HGA oder KGA aus mehrern graden Stücken bestünde: so würde für jedes Stück die Antwort anders seyn. Jedes Stück würde gegen AC eine andre Lage haben: aber diese Stücke hätten alle ihre bestimmte Grösse. Ist HGA 87 F. nun eine krumme Linie: so hat sie in jedem Punct gegen AC oder AB eine andre Lage. Gesetzt nun HGA hat in A gegen AC die Lage, welche AB gegen AC hat: so kann eine andre krumme Linie KgA, die auch durch A gehet, in A gegen AC eben die Lage haben; ob dies gleich nicht angehen würde, wenn KgA, HGA, grade Linien wären. Verstehet man nun durch die Winkel HAC, KAC, die Lage der krummen Linien HGA, KgA in dem Puncte A gegen AC: so ist HAC = KAC = BAC, und dabey ist es gleich viel, welche Lage auch diese Linien in den übrigen Puncten gegen AC haben. Verstehet man ferner durch KAB, HAB die Lage der krummen Linien KgA, HGA in dem Punct A gegen AB: so ist KAB = ○ = HAB, und wenn man nun zugleich behauptet, es sey KAB ▷ HAB, weil HGA zwischen KgA und AB durchgehet: so vergißt man, daß die Lage der krummen Linien KgA, HGA gegen AB in jedem Punct anders ist.

133 §.

Wendet man dies auf die Berührungswinkel an: 85 F. so siehet man leicht, daß die Sätze des 130 §. nichts

weiter, als dieses sagen wollen. Alle Kreise, die einander in D berühren, haben in dem Berührungspunct D gegen den gemeinschaftlichen Durchmesser DH eben die Lage, welche die Tangente AB gegen DH hat. Der Winkel, den die Halbkreise DFH, DGE mit DH in D (also auch in H, und sonst in keinem andern Punct G oder F) mit DH machen, ist ein rechter Winkel, und mit der Tangente machen sie in D gar keinen Winkel. Ein Punct F, der den Kreis EH*f*D beschreibt, ändert beständig seine Richtung so, daß er in jeder folgenden Stelle seines Weges eine andre Richtung, als in der vorigen hat; diese beyden Stellen mögen einander so nahe liegen, als man will. Man kann aber in jedem Punct seines Weges die Richtung angeben, die er jetzt hat, das ist, diejenige, nach welcher er fortgehen würde, wenn sich seine Richtung nun nicht weiter änderte. Wäre der Punct F durch H und *f* in D angekommen, und gienge nun weiter ohne seine Richtung zu ändern: so würde er nach DA fortgehen. Dies würde auch der Punct G thun, wenn er durch L und *g* in D angelanget wäre, und nun die Richtung behielte, die er hat, indem er in D anlangt.

134 §.

88 F. Der Winkel des Abschnitts ADEB heißt derjenige Winkel, den die Sehne AB des Abschnitts mit dem Bogen an seinem Endpuncte einschließt.

Wenn GH den Kreis in B berührt, so ist ABG der Winkel des Abschnitts. Denn es sey BF ein Durchmesser: so ist FBE = FBG, also FBE − EBA = FBG − FBA, oder ABE = ABG.

135 §.

135 §.

Der Winkel des Abschnitts *ABG* macht mit 88 F. dem Winkel im Abschnitt *ADB* zweene rechte Winkel aus.

Beweis. Wenn BF ein Durchmesser ist, und man ziehet AF; so ist FAB = R (123 §.): also AFB + ABF = R (87 §.) = ABG + ABF (127 §.), und AFB = ABG. Da nun AFB + ADB = 2 R (124 §.): so ist auch ABG + ADB = 2 R.

Demnach ist der Winkel des Abschnitts AFBK der den vorigen zur ganzen Kreisfläche ergänzt, nämlich ABH = dem Winkel ADB in dem vorigen Abschnitt.

136 §.

Eine gradlinichte Figur heißt eine im Kreise beschriebene, wenn der Kreis durch alle ihre Winkelspitzen geht, und man sagt, der Kreis sey um die Figur beschrieben. Eine gradlinichte Figur aber heißt eine um den Kreis beschriebene, wenn alle ihre Seiten Berührungslinien des Kreises sind, und man sagt, der Kreis sey in der Figur beschrieben.

137 §.

Eine gradlinichte Figur heißt gleichwinklicht, wenn alle ihre Winkel gleich groß sind, und gleichseitig, wenn alle ihre Seiten gleich groß sind. Eine reguläre Figur ist eine solche, die lauter gleiche Seiten, und gleiche Winkel hat, also beydes gleichseitig, und gleichwinklicht ist. Sie heißt gewöhnlich ein reguläres Polygon, wenn sie mehr als vier Seiten hat. Der Winkel, welchen zwo Seiten einer solchen Figur einschliessen, heißt der Polygonwinkel,

kel, und jede Seite die Polygonseite. Die Ingenieurs haben in der Kriegsbaukunst, wo die Lehre von den Polygonen häufig angewandt wird, die Sprache eingeführt, daß sie die Polygonseite das Polygon nennen. So ist nach ihrer Sprache das Polygon zu einem Fünfeck so viel, als die Polygonseite eines regulären Fünfecks.

Es können nicht alle Winkel einer Figur erhabene, oder solche Winkel seyn, die 2 R übertreffen. Wenn also eine Figur gleichwinklicht ist, so sind alle Winkel hohle Winkel, oder jeder von diesen Winkeln ist kleiner als 2 R.

138 §.

Ein reguläres Polygon in einem Kreise zu beschreiben, wenn vorausgesetzt wird, daß man die Kreislinie in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

89 F. Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Bogen, als das Polygon Seiten haben soll, und ziehe die Sehne eines jeden dieser Bogen: so ist das verlangte Polygon verzeichnet.

Beweis. Wenn AB, BC, CD, u. s. f. diese gleiche Bogen sind: so sind alle ihre Sehnen gleich groß (119 §.). Wenn ferner n die Anzahl der Seiten des Polygons, also auch der gleichen Bogen, und P die Peripherie des Kreises bezeichnet; so steht jeder Winkel wie ABC in einem Abschnitt, dessen Bogen $= \frac{2}{n}$ P ist. Folglich stehen alle Winkel in gleichen Abschnitten, und sind gleich groß (123 §).

Weil jede Sehne ganz im Kreise liegt; so ist jedes im Kreise beschriebene Polygon kleiner, als der Kreis,

und

und alle Seiten desselben sind vom Mittelpunct des Kreises gleich weit entfernt. (121 §.) Wenn aber in eben dem Kreise ein neues Polygon beschrieben wird, das mehr Seiten hat, als das vorige: so werden die Seiten des letztern kleiner, als die Seiten des ersten waren (119 §.), und sind zugleich vom Mittelpunct weiter entfernt (121 §.).

Wenn KL eine gegebene Entfernung vom Mittelpunct, und KL kleiner, als der Halbmesser KB ist: so kann man im Kreise allemahl ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Seiten vom Mittelpunct weiter, als um KL entfernt sind. Denn man ziehe AC durch L auf KL senkrecht: so schneidet AC einen Bogen ABC von bestimmter Grösse ab. Wenn aber P die Peripherie des Kreises ist: so kann man n allemahl so groß nehmen, daß $\frac{1}{n}$ P < ABC wird, (139 §. Rech.) und dann ist die Sehne des Bogens $\frac{1}{n}$ P von K weiter, als um den Abstand KL entfernt (121 §.).

Indessen mag man dem Polygon so viele Seiten geben, als man will: so wird es doch allemahl kleiner, als der Kreis seyn. Auch ist der Umfang eines solchen Polygons kleiner, als des Kreises Umfang, weil jede Sehne kleiner, als ihr Bogen ist (34 §).

Wenn man vom Mittelpunct des Kreises K bis an alle Winkelspitzen des Polygons A, B, C, u. s. f. die Halbmesser KA, KB, KC u. s. f. ziehet: so theilen sie das ganze Polygon in so viele gleichschenklichte Dreyecke, als Seiten vorhanden sind. Diese gleichschenklichten Dreyecke passen überdem alle auf einan-

der (64 §.): also halbirt jeder Halbmesser, wie KB den Polygonwinkel ABC.

139 §.

89 F. Um ein gegebenes reguläres Polygon *ABCDEFGH* einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man theile zweene an einer Seite BC anliegende Polygonwinkel ABC, BCD in zweene gleiche Theile: so werden die Theilungslinien BK, CK einander schneiden (82 §.). Denn es ist ABC + BCD < 4 R (137 §.): also $\frac{1}{2}$ABC + $\frac{1}{2}$BCD = KBC + KCB < 2 R. Der Durchschnittspunct K wird der Mittelpunct des Kreises seyn, der mit dem Halbmesser KB oder KC sich um das Polygon beschreiben läßt.

Beweis. Es ist KB = KC (56 §.). Man ziehe KD: so ist KCD = KBC, (138 §.) CD = BC, KC = KB. Also paßt das Dreyeck KCD auf KBC (54 §.) und es ist KD = KC, KDC = KCB = KCD = KDE. Demnach erhellet auf eben die Art, daß auch KE = KD, und die Entfernung aller übrigen Winkelpuncte von K eben so groß sey.

Jede grade Linie also, die einen Polygonwinkel halbirt, geht durch den Mittelpunct des um das Polygon zu beschreibenden Kreises.

140 §.

Der Winkel BKC am Mittelpunct des um ein reguläres Polygon beschriebenen Kreises, welchen zwey nach den Endpuncten B und C einer Polygonseite gezogene Halbmesser einschliessen, heißt der Centri-Winkel. Weil der Punct K von allen Winkelpuncten und Seitenlinien des regulären Polygons

lygons gleich weit entfernt ist; so kann er auch der Mittelpunct des Polygons genannt werden. Eben dieses Puncts Entfernung KB von den Winkelspitzen kann der grösste Halbmesser, und seine Entfernung von den Seitenlinien der kleinste Halbmesser des Polygons heissen.

Der Centriwinkel ist allemahl $= \frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist. Denn alle Winkel um K machen 4 R, ihre Anzahl ist n, und sie sind alle gleich groß.

Weil ABK + BAK = 2 R — AKB (72 §), und AKB $= \frac{4R}{n}$ ist; so ist ABK + BAK $= 2R - \frac{4R}{n}$.

Da nun BAK = KBC (138 §), und folglich ABK + BAK = ABK + KBC = ABC ist; so wird ABC $= 2R - \frac{4R}{n}$, welches der allgemeine Ausdruck für den Polygon-Winkel ist.

141 §.

Auf einer gegebenen graden Linie *BC* ein reguläres Polygon zu verzeichnen, das eine gegebene Anzahl von Seiten hat, wenn vorausgesetzt wird, daß man den rechten Winkel in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird. 89 F.

Aufl. Man setze an der gegebenen Linie BC in B und C den halben Polygonwinkel, das ist, einen Winkel CBK = BCK = $R - \frac{2R}{n}$ (140 §), wenn n die gegebene Anzahl der Seiten ist. In solcher Absicht

sicht muß man also einen rechten Winkel in n gleiche Theile eintheilen können, damit man eines Winkels, der $= 2\frac{R}{n}$ ist, Ergänzung zum rechten Winkel nehmen könne. Beyde durch B und C gezogene Schenkel des daselbst verzeichneten halben Polygonwinkels werden einander in K schneiden (82 §), und K wird der Mittelpunct, so wie $KB = KC$ der Halbmesser eines Kreises seyn, worin die Sehne BC zu einem Bogen gehört, der im ganzen Umfange n mahl enthalten ist.

Beweis. Weil $KBC + KCB + BKC = 2R$, und $KBC + KCB = 2R - \frac{4R}{n}$: so ist $2R - \frac{4R}{n} + BKC = 2R$, und $2R + BKC = 2K + \frac{4R}{n}$, folglich $BKC = \frac{4R}{n}$ und der Bogen $BC = \frac{1}{n}P$ (117 §), wenn P den Umfang des mit KB beschriebenen Kreises bedeutet.

142 §.

90 F Auf der gegebenen graden Linie *BC* ein reguläres Sechseck zu verzeichnen.

Aufl. Man setze auf BC ein gleichseitiges Dreyeck GBC: so ist G der Mittelpunct, $GB = BC$ ist der Halbmesser des Kreises um das Sechseck, und man kann BC in dem Umfange dieses Kreises sechsmahl herum tragen.

Beweis. Weil $GBC = GCB = R - \frac{2R}{n}$ genommen werden muß (141 §) und hier $n = 6$ ist: so erhält

erhält man $GBC = GCB = R - \frac{2}{6}R = R - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}R$. Wenn man aber auf BC das gleichseitige Dreyeck GBC setzt: so wird $GBC = GCB = \frac{2}{3}R$ (72 §).

Also ist die Seite des regulären Sechsecks allemahl dem Halbmesser des um dasselbe zu beschreibenden Kreises gleich, welches auch so erhellet. Der Centriwinkel BGC im Sechseck ist $= \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R$, also ist das Dreyeck EGC gleichseitig (72 §), und $BC = BG$.

143 §.

Jedes reguläre Polygon *ABCDEF* ist so 90 F. groß, als ein Dreyeck *KLM*, dessen Grundlinie *KL* dem Umfange des Polygons, und die Höhe *KM* dem kleinsten Halbmesser gleich ist.

Beweis. Wenn *n* die Anzahl der Seiten des Polygons ist; so mache man $BC = KN = NO$ u. s. f. bis $KL = nKN = nBC$ wird. Ferner setze man KM auf KL senkrecht, und mache $KM = GH$: so sind die Dreyecke KMN, MNO u. s. f. bis RML. alle so groß, als $KMN = GBC$ (106 §), und es wird $KLM = nKMN = nGBC$. Aber auch $ABCDEF = nGBC$ (138 §): also $ABCDEF = KLM$.

144 §.

Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Polygon zu beschreiben, wenn wiederum vorausgesetzt wird, daß man den Kreis in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche 91 F.
Theile, als das Polygon Seiten haben soll. Wenn

nun L, M, N, O, P, Q, R, u. s. f. die Theilungspuncte sind: so ziehe man durch alle diese Puncte Tangenten des Kreises. Jede derselben wird die nächstfolgende schneiden, in B, C, D, E u. s. f., und alle diese Tangenten werden das verlangte Polygon einschliessen.

Beweis. Die Halbmesser KL, KM, KN u. s. f. sind auf den Berührungslinien senkrecht, und die Winkel LKM, MKN u. s. f. sind kleiner, als 2 R, weil das Polygon wenigstens 3 Seiten haben muß (30 §). Also schneidet jede Tangente AB die nächstfolgende BC (114 §).

In den Vierecken BLKM, CMKN u. s. f. sind die Winkel bey K gleich (116 §), bey L, M, N u. s. f. sind rechte Winkel, also sind die Winkel an B, C, u. s. f. gleich, weil sie die gleichen Winkel bey K zu zweenen rechten Winkeln ergänzen (89 §). Weiter ist $BL = BM$, $CM = CN$ u. s. f. und $MKB = \frac{1}{2}MKL$, $MKC = \frac{1}{2}MKN$, (127 §) auch ist $MKL = MKN$: (118 §), also $MKB = MKC$, mithin auch $MB = MC$ (54 §.) und $BC = 2BM = 2CM$. Eben so erhellet, daß $AB = 2BL$ sey, $CD = 2CN$, u. s. f.: also ist $AB = BC$, $BC = CD$, u. s. f. und es sind alle Seiten der Figur gleich groß.

Weil die Winkelpuncte B, C, D, u. s. f. nothwendig ausserhalb des Kreises fallen (125 §), so ist jedes um einen Kreis beschriebene Polygon grösser, als der Kreis.

Weil ferner die gebrochene Linie LBM > Bog. LM, MCN > Bog. MN u. s. f. (34. 126 §) so ist der Umfang des Polygons grösser, als des Kreises Umfang.

Der

Der größte Halbmesser KB des regulären Polygons wird kleiner, wenn die Anzahl der Seiten grösser angenommen wird. Denn der Bogen LM wird kleiner, also auch der Winkel LKM, und seine Hälfte LKB. Demnach wird BL kleiner (91 §), folglich auch BK, (76 §).

Ist KB eine gegebene Entfernung vom Mittelpunct, die grösser, als der Halbmesser ist: so kann man allemahl um den Kreis ein reguläres Polygon beschreiben, dessen größter Halbmesser noch kleiner als KB ist. Denn man ziehe durch B beyde Tangenten BL, BM: so erhält man einen Bogen LM von bestimmter Grösse. Die Peripherie des Kreises sey = P, und die Anzahl der Seiten des Polygons sey = n: so kann man n so groß nehmen, daß $\frac{1}{n}$ P < Bogen LM wird. (139 §. Rech.) Dann aber ist der größte Halbmesser des regulären Polygons kleiner als KB, wenn es soviele Seiten erhält, als die Zahl n angiebt.

145 §.

In einem regulären Polygon *ABCDEFGH* 91 F. einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man halbire zwo aneinander liegende Seiten AB, BC in L und M mit senkrechten Linien LK, MK. Diese werden einander innerhalb des Polygons schneiden (114 §), weil ABC < 2R ist (137 §). Wenn K der Durchschnittspunct ist; so verzeichne man aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser KL oder KM einen Kreis: dieser wird alle Seiten des Polygons berühren, und der verlangte Kreis seyn.

Beweis.

Beweis. Es sey um das Polygon ein Kreis beschrieben (139 §): so werden alle Seiten des Polygons gleiche Sehnen des um dasselbe beschriebenen Kreises seyn. Die senkrechten Linien KL, KM, KN, u. s. f. also, welche diese Sehnen halbiren, gehen durch den Mittelpunct K des umschriebenen Kreises, und die Sehnen selbst AB, BC u. s. f. sind von diesem Mittelpunct K gleichweit entfernt. Demnach sind KL, KM, KN, u. s. f. gleich groß, ein Kreis, mit KL oder KM beschrieben gehet durch die Puncte L, M, N, u. s. f. und berührt alle Seiten des Polygons, weil alle Winkel, wie KLB, KMC, KND, u. s. f. rechte Winkel sind.

146 §.

92 F. Wenn in dem Kreise ein reguläres Polygon *ABC* beschrieben ist, und man beschreibt in eben dem Kreise statt des vorigen *ABC* ein anders *ADBECF*, das doppelt so viele Seiten hat: so geht von der Differenz des Kreises und des ersten Polygons mehr, als die Hälfte ab, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons vom Kreise.

Beweis. Wenn jeder Bogen ADB, BEC u. s. f. wozu die Seiten des ersten Polygons ABC als Sehnen gehören, in D, E, u. s. f. halbirt wird, und man ziehet von jedem Theilungspunct bis zu den Endpuncten jeder Seite des vorigen Polygons ABC die Sehnen AD, DB u. s. f.: so erhält man das zweyte Polygon ADBECF. Das erste war vom Kreise um so viele Kreisabschnitte, als es Seiten hatte, unterschieden, wovon jeder = ADBL war.

Indem

Indem man nun das zweyte Polygon verzeichnet; so geht von jedem dieser Abschnitte ein Dreyeck = ADB ab. War also n die Anzahl der Seiten im Polygon ABC: so war dessen Differenz vom Kreise = nADBL, und hievon geht n.ADB ab. Es darf also nur bewiesen werden, daß das Dreyeck ADB $\triangleright \frac{1}{2}$ADBL sey, so folgt von selbst, es sey auch nADB $\triangleright \frac{1}{2}$ nADBL. Man ziehe den Halbmesser KD, welcher AB in L schneidet, und senkrecht halbirt (118 §). Durch D sey die Tangente GH des Kreises gezogen: so ist GH mit AB parallel (80 §). Aus A und B richte man AG, BH über AB senkrecht auf: so ist ABHG ein Rechteck, und das Dreyeck ADB = $\frac{1}{2}$ ABHG (106 §). Aber es ist ABHG $\triangleright$ ADBL, also $\frac{1}{2}$ABHG $\triangleright \frac{1}{2}$ADBL. Folglich auch ADB $\triangleright$ $\frac{1}{2}$ADBL, und nADB $\triangleright \frac{1}{2}$ nADBL. Also ist das, was von der Differenz des ersten Polygons und Kreises abgehet, mehr als ihre Hälfte, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten vom Kreise.

Man kann also im Kreise allemahl ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Differenz vom Kreise kleiner, als jede gegebene Grösse ist.

Es sey e eine gegebene Grösse, so klein man will, und P ein Polygon, dessen Differenz vom Kreise = D ist: so kann man die ganze Zahl n so groß nehmen, daß $\frac{1}{n}$ D $\prec e$ wird (139 §. Rech.) Man verdopele die Seiten des Polygons P, und beschreibe im Kreise ein andres p, dessen Differenz vom Kreise = d ist: so ist $d \prec \frac{1}{2}$D. Man verdoppele wieder die

Seiten

Seiten des Polygons p, und beschreibe im Kreise ein andres Π dessen Differenz vom Kreise $= \Delta$ ist, so wird $\Delta < \frac{1}{2}d$, und weil $\frac{1}{2}d < \frac{1}{4}D$ ist: so wird $\Delta < \frac{1}{4}D$ seyn. Auf eben die Art erhellet, wenn man die Verdoppelung der Seiten fortsetzet, das des dritten Polygons Differenz vom Kreise $< \frac{1}{8}D$, oder $< \frac{1}{2^3}D$, des vierten $< \frac{1}{2^4}D$ und also überhaupt des $r$ten Polygons π Differenz δ vom Kreise $< \frac{1}{2^r}D$ seyn werde. Wenn man nun die Arbeit so lange fortsetzet, daß entweder $2^r = n$ oder $2^r > n$ wird: so wird im ersten Falle $\frac{1}{2^r}D \equiv \frac{1}{n}D$, und im zweyten $\frac{1}{2^r}D < \frac{1}{n}D$ in beyden Fällen aber $\delta < e$ seyn müssen.

147 §.

Wenn eine Figur Q kleiner als der Kreis ist; so kann man im Kreise ein reguläres Polygon beschreiben, welches grösser, als diese Figur ist.

Beweis. Die Differenz der Figur Q vom Kreise sey e: so ist $Q + e = K$, wenn K den Kreis bedeutet. Man beschreibe nach dem 146 §. im Kreise ein reguläres Polygon π, dessen Differenz δ vom Kreise kleiner als e ist: so hat man auch $\pi + \delta = K$, also $\pi + \delta = Q + e$ und $\pi > Q$, weil $\delta < e$ ist (28. §. R.).

148 §.

148 §.

Wenn um den Kreis ein reguläres Polygon *ABC* beschrieben ist, und man beschreibt um 93 F.
eben den Kreis ein andres *LMNOPQ*, das doppelt so viele Seiten, als das vorige hat: so geht von der Differenz des ersten Polygons *ABC* und des Kreises mehr als die Hälfte ab, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons vom Kreise war.

Beweis. Man halbire jeden Bogen EDF, FHG u. s. f. durch dessen Endpuncte die Seiten des ersten Polygons ABC als Tangenten des Kreises gehen, in D, H, I u. s. f. und ziehe durch die neuen Theilungspuncte Tangenten des Kreises LM, NO u. s. f. so erhält man ein neues Polygon LMNOPQ, welches doppelt so viel Seiten, als das vorige hat. Das erste war vom Kreise um so viel vermischtlinichte Dreyecke, als es Seiten hat, unterschieden, davon jedes = AEDF war. Indem man nun das zweyte Polygon verzeichnet; so geht von jedem dieser vermischtlinichten Dreyecke ein gradlinichtes = ALM ab. War die Anzahl der Seiten des ersten Polygons n: so war seine Differenz vom Kreise = n. AEDF, und hievon geht n. ALM ab, wenn man das zweyte Polygon verzeichnet. Man ziehe den Halbmesser KD, dieser steht auf LM senkrecht (127 §.), und weil LD = DM (144 §.) AL = AM: so geht KD verlängert durch A (59 §.). Nun ist AM $>$ DM (75 §.) und DM = MF (144 §.): also AM $>$ MF. Folglich das Dreyeck ADM $>$ DMF (106 §.), und ADM $>$ $\frac{1}{2}$ ADF. Nun ist ADF grösser,

als das vermischtlinichte Dreyeck ADSF, also $\frac{1}{2}$ ADF $> \frac{1}{2}$ ADSF, folglich auch ADM $> \frac{1}{2}$ ADSF. Es ist aber ADM = ADL, und ADSF = ADRE, also auch ADL $> \frac{1}{2}$ ADRE, und ADM + ADL $> \frac{1}{2}$ (ADSF + ADRE), oder ALM $> \frac{1}{2}$ AEDF. Dieserwegen wird auch n ALM $> \frac{1}{2} n$ AEDF seyn: oder das was von der Differenz des ersten Polygons vom Kreise abgehet, ist mehr, als ihre Hälfte, so daß die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise kleiner ist, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons von demselben.

Also kann man um jeden Kreis ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Differenz vom Kreise kleiner ist, als jede gegebene Grösse e, welches eben so, wie im 146 §. erhellet.

149 §.

93 F. Wenn eine Figur Z grösser als der Kreis ist; so kann um den Kreis ein reguläres Polygon beschrieben werden, welches kleiner als die Figur Z ist.

Beweis. Die Differenz der Figur Z vom Kreise sey e: so ist $Z = K + e$, wenn K den Kreis bedeutet. Man beschreibe um den Kreis ein reguläres Polygon π, dessen Differenz δ vom Kreise kleiner, als e ist: so hat man $K + \delta = \pi$. Da aber $\delta < e$, und also $K + \delta < K + e$ ist (45 § Rech.): so wird nun $\pi < Z$ seyn.

150 §.

94 F. Wenn eine grade Linie FG so lang ist, als die Peripherie ABC eines Kreises K, und wenn über FG ein Dreyeck FGH verzeichnet wird, dessen Höhe HF dem Halbmesser KD des Krei-

ses *K* gleich ist: so ist das Dreyeck *FGH* der Kreisfläche *K* gleich.

Beweis. Es sey das Dreyeck FGH < K: so kann man im Kreise ein reguläres Polygon P verzeichnen, welches grösser, als FGH ist (147 §.). Es sey also P > FGH, und man ziehe eine grade Linie LM, die dem Umfange des Polygons P gleich ist: so ist LM < ABC (138 §.): also auch LM < FG. Man setze auf LM ein Dreyeck LMN, dessen Höhe NL = KE ist: so wird NL < KD (77 §.), also auch NL < HF seyn. Es ist aber P = LMN (143 §.), und LMN < FGH (106 §.): also wird P < FGH seyn, welches der Voraussetzung widerspricht, indem P > FGH seyn soll, und beydes zugleich kann nicht wahr seyn. Demnach ist das Dreyeck FGH nicht kleiner, als der Kreis K.

Es sey nun das Dreyeck FGH > K: so kann man um den Kreis ein reguläres Polygon Π verzeichnen, welches kleiner als FGH ist (149 §.). Es sey demnach Π < FGH, und man ziehe eine grade Linie PQ, die dem Umfange des Polygons Π gleich ist: so ist PQ > ABC (144 §.): folglich PQ > FG. Man setze auf PQ ein Dreyeck PQR, dessen Höhe PR dem Halbmesser KD gleich ist, so ist auch PR = HF. Nun ist Π = PQR (143 §.), und PQR > FGH (106 §.): also Π > FGH, welches wiederum der Voraussetzung widerspricht, vermöge welcher Π < FGH seyn soll. Also kann das Dreyeck FGH nicht grösser als die Kreisfläche K seyn. Da es nun auch nicht kleiner seyn konnte; so muß FGH = K seyn.

Der VI. Abschnitt.

Allgemeine Lehren von den Verhältnissen, und Proportionen.

151 §.

Es sind bisher zwar häufig ausgedehnte Grössen, als grade Linien, Winkel, Dreyecke, u. s. f. mit einander verglichen, und zugleich Kennzeichen festgesetzet worden, nach welchen man die Prüfung anstellen kann: ob ein Paar Grössen von dieser Art gleich oder ungleich groß sind, und welche von beyden im letztern Falle die grössere, welche die kleinere sey. Allein noch ist die Frage nicht vorgekommen: wie groß denn eigentlich eine Linie gegen die andre, ein Winkel gegen den andern, ein Dreyeck gegen das andre sey? Man siehet leicht, wenn eine Frage von dieser Art beantwortet werden sollte, daß man auf die Lehren werde zurückgehen müssen, welche im 166 u. f. §. §. der Rechenkunst in Anwendung auf die Zahlen vorgetragen sind. Die Grösse einer Linie gegen die andre, eines Winkels gegen den andern, eines Dreyecks gegen das andre, ist nichts anders, als das Verhältniß der einen Linie, des einen Winkels, des einen Dreyecks gegen die andre dieser Grössen.

152 §.

Oft kann man das Verhältniß einer solchen Grösse gegen die andre, z. E. einer Linie gegen die andre, durch eine Zahl ausdrücken, die eben so groß gegen die Einheit ist. Wäre eine Linie A 5 Fuß, und ei-

ne andre B 3 Fuß lang: so wäre A = $\frac{5}{3}$ B. Eine solche Zahl, wie in diesem Fall $\frac{5}{3}$ wäre, die es ausdrückt, wievielmahl das nachfolgende Glied des Verhältnisses selbst, oder ein aliquoter Theil desselben, in dem vorhergehenden enthalten sey, heißt überhaupt der Exponent des Verhältnisses (168 §. Rech.) Bey dieser Art, die Vergleichung anzustellen, liegt allemahl die Voraussetzung zum Grunde, daß beyde Grössen, die man mit einander vergleicht, ein gemeinschaftliches Maaß haben, oder daß ein aliquoter Theil der einen Grösse zugleich ein aliquoter Theil der andern sey. Dergleichen Grössen heissen commensurable Grössen, und von dieser Art sind alle Zahlen, die sich durch eine bestimmte Anzahl Ziffern ausdrücken lassen: aber man darf nicht voraussetzen, daß jede zwo grade Linien, oder überhaupt jede zwo andre ausgedehnte Grössen, ebenfalls ein gemeinschaftliches Maaß haben. In der Folge wird bewiesen werden, daß oft das Gegentheil statt finde, so daß sich zuweilen gar kein aliquoter Theil der einen angeben läßt, der zugleich ein aliquoter Theil der andern wäre. Solche Grössen, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, nennt man incommensurable Grössen.

153 §.

Man kann ein Paar Grössen von der letzten Art zwar auf eine ähnliche Art, wie die commensurablen Grössen mit einander vergleichen; man kann fragen: wie groß eine gegen die andre sey? Aber die Grösse der einen gegen die andre wird sich durch keine bestimmte Zahl völlig genau ausdrücken lassen: durch keine ganze Zahl, weil sonst die eine ganz ein Maaß

der andern wäre; auch durch keine gebrochene Zahl, weil sonst ein aliquoter Theil der einen so vielmahl in der andern enthalten wäre, als der Zähler des Bruchs anzeigte. Sind A und B ein Paar incommensurable Grössen, und man wollte z. E. annehmen, es wäre $B = \frac{7}{4} A$: so wäre $\frac{1}{4} A$ in A viermahl, in B siebenmahl enthalten, welches gegen die Voraussetzung ist. Daraus folgt, daß der Exponent eines solchen Verhältnisses eine Irrationalzahl seyn müsse (191 §. Rech.).

154 §.

Ist die Grösse A gegen B eben so groß, als eine dritte C gegen die vierte D: so ist das Verhältniß von A zu B dem Verhältniß von C zu D gleich, und diese Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine Proportion. Man behält auch hier die übrigen im 169 und 170 §. der Rechenkunst bereits erklärten Redensarten bey, wenn gleich statt der Zahlen andre Grössen verstanden werden.

Die beyden Glieder eines Verhältnisses müssen von einerley Art seyn: es ist aber nicht nothwendig, daß alle vier Glieder einer Proportion von einerley Art sind.

155 §.

Wenn man prüfet, wievielmahl von zwoen Grössen A und B die eine B entweder ganz, oder ein aliquoter Theil von ihr, in der andern A enthalten sey; so ist das Verfahren eine Art von Division (52 §. Rech.). Demnach kann in allen Fällen der Exponent eines Verhältnisses als der Quotient angesehen werden, welcher gefunden wird, wenn man das vorhergehende Glied mit dem nachfolgenden dividirt.

Das ist die Ursache, weswegen man ganz allgemein das Verhältniß A zu B durch eben die zweene Puncte (:), welche sonst das Zeichen der Division abgeben, auf diese Art, A : B bezeichnen kann. Eben darum kann auch der Ausdruck A : B = C : D im allgemeinsten Verstande eine Proportion bezeichnen, wie im 170 §. d. R.

156 §.

Wenn zwo Grössen einander gleich sind, und zwo andre sind ebenfalls gleich groß; so sind ohne Zweifel diese vier Grössen einander proportional. So ist 4 : 4 = 6 : 6, und überhaupt A : A = B : B.

Wären aber die beyden ersten Grössen gleich, und die beyden letzten ungleich; oder umgekehrt, die beyden letzten gleich, und die beyden ersten ungleich groß: so könnten diese Grössen einander nicht proportional seyn. Es ist unstreitig 4 : 3 un= 6 : 6.

Wenn die erste grösser als die zweyte und die dritte kleiner als die vierte; oder die erste kleiner als die zweyte, und die dritte grösser als die vierte ist: so findet zwischen diesen vier Grössen wiederum keine Proportion statt. Es ist ohne Zweifel 4 : 3 un= 5 : 6, und 4 : 7 un= 3 : 2.

157 §.

Woferne man also aus andern Gründen versichert ist, daß vier Grössen einander proportional sind, und man weiß überdem, daß die erste der zweyten gleich sey: so ist auch die dritte der vierten gleich. Wenn aber die erste grösser, oder kleiner, als die zweyte ist; so muß auch die dritte im ersten Falle grösser, und im zweyten Falle kleiner, als die vierte seyn. Ist die Proportion A : B = C : D richtig, und ist A =

B; so ist zugleich C = D. Wenn aber A ▷ B ist; so ist auch C ▷ D: wenn dagegen A ◁ B ist; so muß auch C ◁ D seyn.

158 §.

Ohne Zweifel ist jedes Verhältniß sich selber gleich: (9 §. R.) auch kann man von gleichen Grössen in Verhältnissen und Proportionen eine an die Stelle der andern setzen, ohne daß dies die Verhältnisse und Proportionen ändert (7 §. Rech.). Hält man demnach vier Grössen A, B, C, D, gegen einander, und findet, daß die erste A der dritten C, und die zweyte B der vierten D gleich sey: so ist es gewiß, daß die Proportion A:B=C:D richtig sey. Denn es ist A:B=A:B. Weil man nun C statt A, und D statt B setzen kann; so muß A:B=C:D seyn.

159 §.

Zwey Verhältnisse, die einem und demselben dritten, oder auch zwoen andern gleichen Verhältnissen gleich sind, sind auch unter sich gleich groß (11 §. Rech.). Ist A:B=C:D, und E:F=C:D: so ist auch A:B=E:F. Wenn ferner A:B=C:D, und E:F=G:H, überdem aber C:D=G:H ist; so folgt daraus, es sey A:B=E:F.

160 §.

Wenn ein Paar Verhältnisse ungleich groß sind: so heißt eines von beyden das grössere, und das andre das kleinere. Es ist aber, überhaupt zu sagen, das Verhältniß A:B gröſſer, als das Verhältniß C:D, wenn A gegen B gröſſer, als C gegen D ist. Ein Paar besondre Fälle davon sind folgende.

Wenn

Wenn A ⊳ C, und B = D ist; so ist A : B ⊳ C : D z. E. 12 : 4 ⊳ 8 : 4. Wäre A = C und B ⊲ D; so wäre wiederum A : B ⊳ C : D. Z. E. 12 : 4 ⊳ 12 : 6.

161 §.

Ein Verhältniß, das grösser oder kleiner ist, als eines von zwoen gleichen Verhältnissen, ist auch grösser, oder kleiner, als das andre. Und ein Verhältniß, das grösser ist als das grössere, oder kleiner, als das kleinere zweyer ungleichen Verhältnisse, ist auch im ersten Fall grösser, im zweyten Fall kleiner, als das andre (13 §. Rech.).

162 §.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion von einerley Art sind, und es ist das zweyte Glied dem vierten gleich; so muß auch das erste dem dritten gleich seyn.

Beweis. Ist nemlich A : B = C : D, und B = D, so können A und C nicht ungleich seyn, weil sonst das Verhältniß A : B dem andern C : D ungleich wäre, (160 §.), welches der Voraussetzung entgegen ist.

163 §.

Wenn in einer Proportion gleichartiger Grössen $A : B = C : D$, das zweyte Glied B grösser oder kleiner ist, als das vierte D; so muß auch das erste A im ersten Fall grösser, und im zweyten Fall kleiner seyn, als das dritte C.

Beweis. Wenn die Proportion A : B = C : D richtig ist, und es ist überdem B ⊳ D; so kann einmahl nicht A = C seyn, weil sonst die Verhältnisse A : B und C : D ungleich wären (160 §). Es kann auch nicht A ⊲ C seyn. Denn es sey E = C: so ist

$E:B \lessdot C:D$ (160 §). Wäre nun $A \lessdot C$; so wäre $A \lessdot E$, und $A:B \lessdot E:B$ (160 §), folglich auch $A:B \lessdot C:D$ (161 §), welches, wie vorhin, wider die Voraussetzung streitet. Wenn demnach $B \gtrdot D$ ist; so muß auch $A \gtrdot C$ seyn.

Behält man die Voraussetzung, daß $A:B = C:D$ sey, nimmt aber überdem an, daß $B \lessdot D$ sey; so kann wiederum nicht $A = C$ seyn, weil sonst $A:B \gtrdot C:D$ wäre (160 §.). Es kann aber auch nicht $A \gtrdot C$ seyn. Wenn nemlich $E = C$ angenommen wird, so ist nun $E:B \gtrdot C:D$. Wäre überdem $A \gtrdot C$, so wäre auch $A \gtrdot E$, und $A:B \gtrdot E:B$, (160 §), folglich $A:B \gtrdot C:D$, (161 §.) ebenfalls der Voraussetzung entgegen. Wenn also $B \lessdot D$ ist, so muß auch $A \lessdot C$ seyn.

164 §.

Wenn man eine Grösse mit einer Zahl multiplicirt; so verhält sich die Einheit zum Multiplicator, wie das Multiplicandum zum Product (30. 106. 107 §. R.). Diese Eigenschaft der Multiplication kann man für die Erklärung der **Multiplication im allgemeinsten Verstande** annehmen: eine Grösse mit einer andern Grösse multipliciren, heißt zur gegebenen Einheit, dem Multiplicator und Multiplicando die vierte Proportional-Grösse suchen, welche letztere denn das **Product** heißt. Es ist nicht nothwendig, daß beyde Factoren von einerley Art sind, nur muß die Einheit mit dem multiplicator von einerley Art seyn (154 §).

165 §.

Eigentlich ist auch dieser allgemeinen Erklärung gemäß der Multiplicator eine Zahl, nur könnte er

wohl eine Irrationalzahl seyn. Es sey A:B=C:D, und A=1; so ist D=C × B vermöge der Erklärung (164 §.). Im Grunde aber ist es nur eine Abkürzung des Ausdrucks $D=C \times \frac{B}{1}$ oder $C \times \frac{B}{A}$, da dann $\frac{B}{A}$ eine Zahl ist, (155 §.) die rational, oder irrational seyn kann.

166 §.

Wenn eine Grösse mit einer Zahl dividirt wird; so verhält sich der Divisor zur Einheit, wie das Dividendum zum Quotienten (42. 111 §. Rech.): dieserwegen kann man auch die folgende Erklärung der **Division im allgemeinsten Verstande** festsetzen. Eine Grösse mit einer andern Grösse **dividiren** heißt zum Divisor, der Einheit und dem Dividendo die vierte Proportional-Grösse suchen, welche letztere nun der **Quotient** wird. Es ist alsdenn nicht nothwendig, daß das Dividendum mit dem Divisor von einerley Art sey; aber die Einheit und der Divisor so wie auch das Dividendum und der Quotient müssen gleichartig seyn. (154 §).

167 §.

Der Allgemeinheit dieser Erklärung ungeachtet, bleibt doch der Divisor eigentlich eine Zahl: nur daß diese Zahl wohl irrational seyn könnte. Es sey A:B=C:D, und B=1, so ist vermöge der Erklärung D=C:A. Eigentlich ist das so viel, als wenn man schreibt $D=C:\frac{A}{1}$, oder $D=C:\frac{A}{B}$. Weil nemlich vermöge der

Pro-

Proportion $A:B=C:D$ die Zahl $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ist, so muß $D\times\frac{A}{B}=C$ seyn, also $D=C:\frac{A}{B}$.

168 §.

Stellet man sich die Divisionen als ein Verfahren vor, vermittelst dessen eine Zahl gefunden werden soll, die es ausdrückt, wievielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey, wie im 155 §; so muß der Divisor mit dem Dividendo von einerley Art seyn, und es verhält sich nun das Dividendum zum Divisor, wie der Quotient zu Eins. Der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, stellet das Dividendum wieder her. Wenn man also umgekehrt das Dividendum mit der Zahl dividirt, welche als Quotient gefunden ward, so muß der vorhin gebrauchte Divisor als Quotient herauskommen.

169 §.

Hat man in dem Sinne, wie es im 166sten und 167 § ist erklärt worden, mit einer Zahl dividirt, also einen Quotienten erhalten, der mit dem Dividendo von einerley Art ist; so muß dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt das Dividendum herstellen. Wird hiernächst umgekehrt das Dividendum mit der Grösse dividirt, welche als Quotient gefunden ward; so muß die Zahl der Quotient werden, welche vorhin als Divisor gebraucht ward.

170 §.

Ein Verhältniß nennt man ein **rationales**, oder ein **irrationales** Verhältniß, nachdem die Glieder desselben **commensurable**, oder **incommensurable** Grös-

sen

sen sind, weil der Exponent im ersten Fall eine rationale, im letzten Fall aber eine irrationale Zahl ist.

171 §.

Weil gleiche Verhältnisse gleiche Exponenten haben müssen; so können nur zwo rationale Verhältnisse, oder statt dessen zwo irrationale Verhältnisse eine Proportion ausmachen, die also ebenfalls im ersten Fall eine rationale, im letzten Fall eine irrationale Proportion heissen kann.

172 §.

Wenn A und B überhaupt ein Paar incommensurable Grössen von einerley Art bezeichnen, und m eine ganze Zahl vorstellet; so ist $\frac{1}{m}$ B ein aliquoter Theil von B. Man setze bey angestellter Prüfung nach dem 155 § fände sich, daß dieser Theil $\frac{1}{m}$ B in der Grösse A $n$mahl enthalten sey, und noch ein Rest R, der kleiner als $\frac{1}{m}$ B ist, übrig bleibe; so hat man $A = \frac{n}{m} B + R$, also $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$. Alsdenn bezeichnet $\frac{n}{m}$ den bekannten rationalen Theil des Exponenten $\frac{A}{B}$, und $\frac{R}{B}$ ist der unbekannte irrationale Theil.

173 §.

173 §.

Man nehme an, daß N jede andre gegebene Zahl bezeichne, jedoch so, daß $N < \frac{A}{B}$, und $N + D = \frac{A}{B}$ sey: alsdenn ist D eine Zahl von bestimmter Grösse. Man nehme die Zahl m so groß an, daß $\frac{1}{m} < D$ wird, (139 §. Rech.) und n sey wie im vorigen § die Zahl, welche angiebt, wie vielmahl $\frac{1}{m}$ B in A enthalten ist, bis auf einen Rest R, der kleiner ist, als $\frac{1}{m}$ B: alsdenn ist zugleich $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$, mithin auch $\frac{R}{B} < D$. Ferner ist, wie im vorigen §, $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = \frac{A}{B}$; also $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = N + D$, mithin bey eben dieser Voraussetzung $\frac{n}{m} > N$.

174 §.

In dem Fall, wenn A und B commensurable Grössen sind, kann die Zahl m so angenommen werden, daß R verschwindet, und $A = \frac{n}{m} B$ wird. Demnach kann der Exponent eines jeden Verhältnisses durch eine Rationalzahl ausgedrückt werden, entweder völlig genau, oder doch so, daß der noch fehlende

lende irrationale Theil kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Bruch. Sind nun überdem auch C und D commensurable Grössen, und man findet $C = \frac{n}{m} D$; so ist $A:B = C:D$ (171 §.).

175 §.

Wenn die Verhältnisse $A:B$ und $C:D$ irrational, auch überdem die ähnlichen aliquoten Theile $\frac{1}{m} B$, und $\frac{1}{m} D$ der beyden nachfolgenden Glieder in den dazu gehörigen vorhergehenden A und C gleichvielmahl enthalten, mithin die rationalen Theile der Exponenten dieser Verhältnisse gleich groß sind, wie groß auch die Zahl m angenommmen wird; so ist $A:B = C:D$.

Beweis. Man nehme an, daß A mit $\frac{1}{m}$ B dividirt den Rest R, C aber mit $\frac{1}{m}$ D dividirt den Rest r lasse, so aber in beyden Fällen der Quotient n gefunden werde: so ist $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$ und $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$. Wenn nun $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, oder welches einerley ist, wenn $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$ wäre; so könnte die Zahl m so groß angenommen werden, daß $\frac{n}{m} > \frac{C}{D}$ würde. (173 §.) Weil aber vermöge

der

der Voraussetzung $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$ bleibt; so ist allemahl $\frac{n}{m} < \frac{C}{D}$, und das widerspricht dem vorigen: mithin kann bey eben der Voraussetzung nicht $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$ seyn.

Wäre dagegen $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, so könnte man wiederum die Zahl m so groß nehmen, daß $\frac{n}{m} > \frac{A}{B}$ würde, (173 §.) Es bleibt aber vermöge der Voraussetzung $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, folglich $\frac{n}{m} < \frac{A}{B}$, welches dem vorigen wiederspricht: folglich kann auch nicht $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$ seyn. Diesemnach ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, oder $A:B=C:D$.

176 §.

Fände man die rationalen Theile der Quotienten $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$, ungleich groß; so wären gewiß diese Quotienten selbst ungleich. Wäre $\frac{A}{B} = \frac{n+1}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, so wäre schon $\frac{n+1}{m}$

$\frac{n+1}{m} > \frac{C}{D}$, weil $\frac{1}{m} > \frac{r}{D}$ ist: also auch $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$.

177 §.

Weiß man aus andern Gründen, daß $A : B = C : D$ sey; so sind ähnliche aliquote Theile $\frac{1}{m}$ B, und $\frac{1}{m}$ D der beyden nachfolgenden Glieder allemahl in den dazu gehörigen vorhergehenden Gliedern, bis auf solche Reste, die kleiner als die Divisoren sind, gleichvielmahl enthalten, wie groß auch die Zahl m angenommen wird: denn im entgegengesetzten Fall wären die Verhältnisse A : B und C : D ungleich (176 §.).

178 §.

Wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, so hat man auch in umgekehrter Ordnung $B : A = D : C$.

Beweis. Es muß allemahl beydes zugleich $A = \frac{n}{m} B + R$, $C = \frac{n}{m} D + r$, und $R < \frac{1}{m} B$, so wie $r < \frac{1}{m} D$ seyn, was auch m für eine Zahl bezeichnet (177 §.): also ist $B = \frac{m}{n} (A - R)$ und $D = \frac{m}{n} (C - r)$, mithin $\frac{B}{A - R} = \frac{m}{n}$

$= \frac{D}{C-r}$. Man setze $\frac{1}{m} B - R = S$, und $\frac{1}{m} D - r = s$, so ist $A + S = \frac{n+1}{m} B$, und $C + s = \frac{n+1}{m} D$, folglich $\frac{B}{A+s} = \frac{m}{n+1}$ $= \frac{D}{C+s}$. Ferner sey $B : A = D : E$, so muß $E = C$ seyn.

Wäre $E < C$, und $E + e = C$, also $E = C - e$; so könnte man m so groß annehmen, daß $\frac{1}{m} D <$ e würde. Dies sey geschehen, so ist auch $r < \frac{1}{m} D$, also $r < e$, folglich $C - r > C - e$, oder $C - r > E$, mithin $\frac{D}{C-r} < \frac{E}{D}$. Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{D}{E} = \frac{B}{A}$, also wäre $\frac{D}{C-r} < \frac{B}{A}$, mithin auch $\frac{B}{A-R} < \frac{B}{A}$, welches nicht seyn kann.

Wäre $E > C$, so setze man, es sey $E = C + d$, und nehme m so groß an, daß $\frac{1}{m} D < d$ wird: so ist auch $s < \frac{1}{m} D$, also $s < d$ und $C + s <$ $C + d$.

$C+d$, oder $C+s < E$, und $\frac{D}{C+s} > \frac{D}{E}$.

Vermöge der Voraussetzung ist $\frac{D}{E} = \frac{B}{A}$, also wäre $\frac{D}{C+s} > \frac{B}{A}$, folglich auch $\frac{B}{A+s} > \frac{B}{A}$, welches unmöglich ist.

Diesemnach ist nothwendig $E = C$, und man erhält $B:A = D:C$.

179 §.

Aus einer jeden Proportion $A:B = C:D$, wenn alle Glieder von einerley Art sind, folgt auch (*terminos antecedentes et consequentes summando*) $A+C:B+D = A:B$, oder $= C:D$.

Beweis. Es ist allemahl beydes zugleich $A = \frac{n}{m} B + R$ und $C = \frac{n}{m} D + r$, wie groß auch m angenommen wird: (177 §.) also ist $A+C = \frac{n}{m}(B+D) + R + r$, und $R + r < \frac{1}{m}(B+D)$, weil $R < \frac{1}{m} B$ und $r < \frac{1}{m} D$ bleibt. Folglich ist vermöge des 175 §. auch $A+C:B+D = A:B$ oder $= C:D$.

180 §.

Wenn alle vier Glieder der Proporrion $A:B = C:D$ von einerley Art sind, und überdem

$B > D$, also auch $A > C$ ist; (163 §.) so folgt auch, (*antecedentes et consequentes differentiando*) es sey $A - C : B - D = C : D$, oder $= A : B$.

Beweis. Man setze $A - C = F$, $B - D = G$, so ist $A = F + C$, $B = G + D$, also vermöge der Voraussetzung $F + C : C + D = C : D$. Ferner sey $D : C = G : E$, also auch $C : D = E : G$; (178 §.) so ist $E + C : G + D = C : D$, (179 §.) folglich $E + C : G + D = F + C : G + D$ (159 §.). Demnach ist ferner $E + C = F + C$, (162 §.) folglich $E = F$, oder $E = A - C$, und man erhält $C : D = A - C : B - D$, oder $A - C : B - D = C : D$.

181 §.

Wenn man zwo Grössen *A* und *B*, die von einerley Art sind, mit einerley rationalen oder irrationalen Zahl multiplicirt, oder dividirt; so verhalten sich die Producte, wie die Multiplicanda, und die Quotienten wie die Dividenda.

Beweis. 1.) Es ist $A : B = A : B$, also $2A : 2B = A : B$, (179 §.) folglich aus eben dem Grunde $3A : 3B = A : B$, und wiederum $4A : 4B = A : B$. Allemahl wenn $nA : nB = A : B$ ist, so folgt, es sey auch $(n + 1)A : (n + 1)B = A : B$. Aber die Proportion $nA : nB = A : B$, ist wahr, wenn n die Zahl, 2, oder 3, oder 4 bezeichnet, also ist sie allemahl richtig, wenn auch n jede andre ganze Zahl bezeichnet.

2.) Es sey m eine andre ganze Zahl: so ist $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = m . \frac{A}{m} : m . \frac{B}{m}$ (n. 1.) folglich $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = A : B$.

3.) Fer-

3.) Ferner ist $n \cdot \frac{A}{m} : n \cdot \frac{B}{m} = \frac{A}{m} : \frac{B}{m}$, (n. 1.) und $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = A : B$, (n. 2.) also auch $\frac{n}{m} A : \frac{n}{m} B = A : B$.

4.) Wenn $\frac{P}{Q}$ eine Irrationalzahl bezeichnet, oder welches einerley ist, wenn P und Q incommensurable Grössen sind; so findet man allemahl $P = \frac{n}{m} Q + R$ so daß $R < \frac{1}{m} Q$ ist, wie groß auch m angenommen wird: mithin $\frac{P}{Q} = \frac{n}{m} + \frac{R}{Q}$, und $\frac{R}{Q} < \frac{1}{m}$. Man setze $\frac{P}{Q}$. $A = F$, $\frac{P}{Q} . B = G$, und nehme $A : B = F : E$ an: so hat man überdem auch $\frac{n}{m} A : \frac{n}{m} B = F : E$, und $\frac{n+1}{m} A : \frac{n+1}{m} B = F : E$. (n. 3.)

Es ist aber $F = \left(\frac{n}{m} + \frac{R}{Q}\right) . A$, also $F > \frac{n}{m} A$ und zugleich $F < \frac{n+1}{m} A$; folglich auch $E > \frac{n}{m} B$ und zugleich $E < \frac{n+1}{m} B$, (163 §.)

mithin allemahl $E = \frac{n}{m} B + \varrho$, so daß $\varrho < \frac{1}{m} B$ ist. Ferner ist $G = \left(\frac{n}{m} + \frac{R}{Q}\right) B$, und $\frac{R}{Q} B < \frac{1}{m} B$. Wenn also $\frac{R}{Q} B = r$ gesetzt wird; so ist $G = \frac{n}{m} B + r$, und $r < \frac{1}{m} B$, folglich $E : B = G : B$, (175 §.) und $E = G$. (162 §.) Demnach ist $A : B = F : G$, oder $A : B = \frac{P}{Q} . A : \frac{P}{Q} . B$.

5.) Hätte man A und B mit $\frac{P}{Q}$ dividirt, es mag $\frac{P}{Q}$ eine rationale, oder irrationale Zahl seyn; so setze man $A : \frac{P}{Q} = K$, $B : \frac{P}{Q} = L$. Alsdenn ist $A = \frac{P}{Q} . K$ und $B = \frac{P}{Q} . L$, also $A : B = K : L$ (*n.* 4.) oder $A : B = \left(A : \frac{P}{Q}\right) : \left(B : \frac{P}{Q}\right)$.

182 §.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion $A : B = C : D$ von einerley Art sind, so kann man

man die mittlern Glieder verwechseln, und es ist auch (*permutando*) $A : C = B : D$ eine richtige Proportion.

Beweis. Wenn $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$ gefunden wird, so ist auch $\frac{C}{D} = \frac{P}{Q}$: mithin $A = \frac{P}{Q} . B$ und $C = \frac{P}{Q} . D$. Ferner ist $\frac{P}{Q} . B : \frac{P}{Q} . D = B : D$, der Bruch $\frac{P}{Q}$ mag rational, oder irrational seyn, (181 §.) also auch $A : C = B : D$.

183 §.

Wenn $\frac{P}{Q}$ ein irrationaler Bruch, und eine dritte Grösse A mit P und Q von einerley Art ist; so ist auch $\frac{P}{Q} . A = \frac{A}{Q} . P$.

Beweis. Man setze $\frac{P}{Q} . A = F$, so ist $P : Q = F : A$, also auch $Q : P = A : F$. (178 §.) Daraus folgt $Q : A = P : F$, (182 §.) oder $\frac{A}{Q} = \frac{F}{P}$, und $F = \frac{A}{Q} . P$, mithin auch $\frac{P}{Q} . A = \frac{A}{Q} . P$.

184 §.

1.) Wenn $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}$, irrationale Zahlen sind; so ist das Product $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \left(\frac{P}{Q} \cdot R\right) : S.$

2.) Wenn überdem P, Q, R, S, insgesammt Grössen von einerley Art sind; so ist $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{R}{Q} \cdot \frac{P}{S}$.

Beweis. 1.) Man setze die Zahl $\frac{R}{S} = n$, so ist $R = n \cdot S$, also $\frac{P}{Q} \cdot R = \frac{P}{Q} \cdot n \cdot S$, und man erhält $\left(\frac{P}{Q} \cdot R\right) : S = \frac{P}{Q} \cdot n$, oder $\left(\frac{P}{Q} \cdot R\right) : S = \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S}$.

2.) Aus eben dem Grunde ist $\frac{R}{Q} \cdot \frac{P}{S} = \left(\frac{R}{Q} \cdot P\right) : S$. Wenn also P, Q, R, S, Grössen von einerley Art sind; so hat man auch $\frac{P}{Q} \cdot R = \frac{R}{Q} \cdot P$; (183. §.) folglich ist $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{R}{Q} \cdot \frac{P}{S}$.

185 §.

185 §.

Aus zwoen Proportionen, wie

$$A : B = C : D,$$

und $B : E = D : F$,

wenn gleich die Glieder vor dem Gleichheitszeichen mit denen hinter dem Gleichheitszeichen nicht von einerley Art sind, folgt (*ordinatim et ex aequo*) die dritte $A : E = C : F$.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, und $\frac{B}{E} = \frac{D}{F}$, also $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{E} = \frac{C}{D} \cdot \frac{D}{F}$: folglich auch $\frac{B}{B} \cdot \frac{A}{E} = \frac{D}{D} \cdot \frac{C}{F}$. (184 §.) Demnach ist auch $\frac{A}{E} = \frac{C}{F}$, oder $A : E = C : F$.

186 §.

Zwey Irrationalzahlen $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$, geben mit veränderter Ordnung einerley Product.

Beweis. Es ist $1 : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} : \frac{P}{Q}$. $\frac{R}{S}$, und $1 : \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} : \frac{R}{S} \cdot \frac{P}{Q}$: (164. §.) also auch $1 : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} : \frac{R}{S} \cdot \frac{P}{Q}$. (182. §.) Aus dieser und der ersten Proportion folgt

$\frac{P}{Q} : \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} : \frac{R}{S} \cdot \frac{P}{Q}$, (159. §.) oder $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} : \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \cdot \frac{P}{Q} : \frac{P}{Q}$, (178. §.) folglich $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{R}{S} \cdot \frac{P}{Q}$. (162. §.)

187 §.

Auch alsdenn, wenn ein Paar gleichartige Grössen A, B, mit einer dritten C, welche mit jenen von einerley Art ist, dividirt werden, verhalten sich die Quotienten $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, welches nun Zahlen sind, wie die Dividenda.

Beweis. Man setze $\frac{A}{C} = Q$, und $\frac{B}{C} = q$, so ist $A : C = Q : 1$, und $B : C = q : 1$, (168. §.) also auch $C : B = 1 : q$. (178. §.) Aus der ersten und dritten Proportion aber folgt $A : B = Q : q$, (185. §.) oder $A : B = \frac{A}{C} : \frac{B}{C}$.

188 §.

Multiplicirt man gleiche Grössen mit ungleichen rationalen oder irrationalen Zahlen, m, n, so verhalten sich die Producte, wie die Multiplicatoren.

Beweis. Es sey $mA = P$, $nA = p$; so ist $m = \frac{P}{A}$, und $n = \frac{p}{A}$. Ferner ist $P : p = \frac{P}{A} : \frac{p}{A}$, (187 §.) also $P : p = m : n$, oder $mA : nA = m : n$.

189 §.

189 §.

Wenn A:B=C:D ist; so ist auch

I) Zusammengesetzt oder getheilt (componendo, vel dividendo) A+B:B=C+D:D, oder A−B:B=C−D:D. Im letzten Fall wird vorausgesetzt, daß A ▷ B, also auch C ▷ D sey.

Beweis. Es sey $A = \frac{n}{m} B + R$, und $R < \frac{1}{m} B$, so ist zugleich $C = \frac{n}{m} D + r$ und $r < \frac{1}{m} D$ (177 §). Daraus folgt $A + B = \frac{n+m}{m} B + R$, und $C + D = \frac{n+m}{m} D + r$: folglich A+B:B=C+D:D (175 §.)

Wenn ferner A ▷ B, also wenigstens n nicht kleiner, als m ist; so hat man auch $A - B = \frac{n-m}{m} B + R$, und $C - D = \frac{n-m}{m} D + r$: mithin A−B:B=C−D:D (175 §.).

II) Umgekehrt zusammengesetzt oder getheilt, (convertendo et componendo vel dividendo) A:A+B=C:C+D oder A:A−B=C:C−D.

Beweis. Aus A:B=C:D folgt A+B:B=C+D:D, vermöge n.I, und überdem B:A=D:C (178 §); also auch A+B:A=C+D:C (185 §), oder A:A+B=C:C+D (178 §). Ferner ist A−B:B=C−D:D, (n.I.) und B:A=D:C (178 §.), also A−B:A=C−D:C (185 §), oder A:A−B=C:C−D (178 §.).

III) Aus

III) Aus den beyden Proportionen $A+B:A=C+D:C$, und $A:A-B=C:C-D$, folgt auch nach dem 185 § diese $A+B:A-B=C+D:C-D$.

IV) Wenn also alle vier Glieder der Proportion $A:B=C:D$ von einerley Art sind, so hat man aus der letzten Proportion wiederum die folgende $A+B:C+D=A-B:C-D$ (182 §.).

190 §.

Man kann zwey gleichnahmige Glieder einer Proportion mit einerley Rational- oder Irrational-Zahl multipliciren oder dividiren, und man erhält eine neue Proportion.

Beweis. Wenn $A:B=C:D$ ist; so hat man $nA:A=nC:C$, wenn gleich n irrational wäre, und $A:B=C:D$; also $nA:B=nC:D$ (185 §). Mit der Proportion $A:B=C:D$ verbinde man ferner diese $B:nB=D:nD$ (178 §), so ist auch $A:nB=C:nD$ (185 §). Aus jener Proportion wird alsdenn ferner $A:\frac{B}{n}=C:\frac{D}{n}$, aus dieser aber $\frac{A}{n}:B=\frac{C}{n}:D$ gefunden (181 §).

Aus eben der Proportion $A:B=C:D$ folgt also auch $nA:mB=nC:mD$.

191 §.

Aus zwoen oder mehrern Proportionen von dieser Art:

$$A:B=C:D$$
$$E:F=C:D$$
$$G:H=C:D \text{ u. s. f.}$$

wenn

wenn die ersten beyden Glieder alle gleichartig sind, folgt $A+E+G$ &c: $B+F+H$ &c $=C:D$.

Beweis. Aus den ersten beyden folgt A : B = E:F (159 §), und diese giebt A + E : B + F = A : B (179 §) oder A + E : B + F = C : D (159 §). Diese mit der dritten zusammengenommen giebt eben so die Folge A + E + G : B + F + H = C : D. So kann man nun von jeder Anzahl von Proportionen auf die nächstfolgende schliessen, die um eines grösser ist: also gilt der Satz für so viele Proportionen, als man will.

192 §.

Wenn in zwoen Proportionen

$$A:B=C:D$$
$$A:E=F:D,$$

die beyden äussern Glieder einerley sind; so sind die beyden mittlern Glieder einander in umgekehrter Ordnung proportional.

Beweis. Es ist $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, (178 §.) und $\frac{A}{E} = \frac{F}{D}$: also $\frac{B}{A} \cdot \frac{A}{E} = \frac{F}{D} \cdot \frac{D}{C}$. Daraus folgt ferner $\frac{A}{A} \cdot \frac{B}{E} = \frac{D}{D} \cdot \frac{F}{C}$, (184 §.)

mithin $\frac{B}{E} = \frac{F}{C}$, oder B : E = F : C.

Wenn also in zwoen Proportionen

$$A:B=C:D$$
$$E:B=C:F,$$

die mittlern Glieder einerley sind; so sind die äussern Glieder einander umgekehrt proportional. Denn es ist auch B : A = D : C, und B : E = F : C. (178 §).

193 §.

193 §.

Aus zwoen Proportionen von dieser Art $A:B=C:D$, und $B:E=F:C$, wenn die mittlern Glieder der ersten mit den äussern Gliedern der zweyten einerley sind, folgt *(perturbate & ex æquo)* die dritte $A:E=F:D$.

Beweis. Aus der ersten folgt $B:A=D:C$, (178 §.) und aus dieser mit der zweyten $B:E=F:C$ verbunden folgt $A:E=F:D$ (192 §).

194 §.

Die Factoren zweyer gleich grossen Producte mA, mB, sind einander in umgekehrter Ordnung proportional.

Auch wenn gleiche Grössen mit ungleichen Grössen von eben der Art, oder auch mit ungleichen Zahlen dividirt werden; so verhalten sich die Quotienten umgekehrt, wie die Divisores.

Beweis. 1.) Es ist $1:n=A:nA$, und $1:m=B:mB$; (164 §.). Wenn also $nA=mB$ ist, so hat man $n:m=B:A$, (192 §).

2.) Wenn D, d, δ, Grössen von einerley Art, also die Quotienten $\frac{D}{d}=Q$ und $\frac{D}{\delta}=q$ Zahlen sind, so hat man $D=Q.d$ und $D=q.\delta$; also $Q.d=q.\delta$, und daraus folgt $Q:q=\delta:d$. (num. 1).

Auch alsdenn, wenn die Divisoren Zahlen sind, hat man $D=d.Q=\delta.q$, mithin wiederum $d:\delta=q:Q$, oder $q:Q=d:\delta.=q:D$. Aber aus $d:1=D:Q$ und $1:\delta=q:D$, folgt, $d:\delta=q:Q$ (193 §).

195 §.

Wenn in zwoen Proportionen $A:B=C:D$, und $E:F=G:H$ die beyden ersten gleichnahmigen

migen Glieder beyder Proportionen einander proportional sind; so sind auch die beyden letztern einander proportional.

Beweis. Weil A:E=C:G, und E:F=G:H angenommen wird; so ist A:F=C:H (185 §). Ueberdem ist B:A=D:C, also B:F=D:H. (185 §.)

196 §.

Wenn in zwoen Proportionen $A:B=C:D$ und $E:F=G:H$ die gleichnahmigen Glieder der einen den gleichnahmigen Gliedern der andern proportional sind; so sind die Summen oder Differenzen der Glieder wie sie nach einander folgen, proportional: da dann im letzten Fall alle Glieder der einen Proportion die gleichnahmigen Glieder der andern übertreffen müssen.

Beweis. Weil A:E=C:G angenommen wird; so ist A+E:E=C+G:G (189 §); und weil überdem E:F=G:H gesetzt ist, so wird A+E:F=C+G:H (185 §). Ferner hat man B:F=D:H (195 §); also ist F:B+F=H:D+H (189 §), mithin auch A+E:B+F=C+G:D+H (185 §). Wäre E < A, also G < C, und wäre überdem F < B, also H < D; so könnte man allenthalben das Zeichen − statt + schreiben, und man erhielte A−E:B−F, =C−G:D−H.

197 §.

1.) Der erste Satz des vorigen § läßt sich auch auf mehr, als zwo Proportionen anwenden. Es sey

A:B=C:D	und	so ist
E:F=G:H	A:E=C:G	B:F=D:H
I:K=L:M	E:I=G:L	F:K=H:M;

also

also hat man aus den beyden ersten Proportionen $A+E:B+F=C+G:D+H$, (196 §). Ferner ist vermöge der zweyten Columne $A+E:E=C+G:G$; (189 §) mithin auch $A+E:I=C+G:L$. (185. §). Hiemit verbinde man $I:K=L:M$, so erhält man vermöge des 196 §, auch $A+E+I:B+F+K=C+G+L:D+H+M$.

So kann man von jeder Anzahl von Proportionen auf die nächstfolgende schliessen; also gilt der Satz von so viel Proportionen, als man will, wenn ihre gleichnahmigen Glieder proportional sind.

2.) Wenn in mehrern Proportionen zwo gleichnahmige Glieder einerley sind, wie in folgenden:

$$A:a=B:b$$
$$C:a=D:b$$
$$E:a=F:b \text{ u. s. f.}$$

so findet die Regel des vor § ihre Anwendung, weil alsdenn die gleichnahmigen Glieder in der zweyten und vierten Stelle, wie sie in der Ordnung folgen proportional sind. Demnach hat man

$$A+C+E+\text{etc}:na=B+D+F+\text{etc}:nb,$$

wenn n die Anzahl der Proportionen ist: also ist auch

$$A+C+E+\text{etc}:a=B+D+F+\text{etc}:b$$

(190 §).

198 §.

Wenn P und Q Factoren eines Products $P \times Q$ sind; so muß man sich unter einem von beyden Factoren die Einheit als Divisor vorstellen, so daß eigentlich $\frac{P}{1}$. Q oder $\frac{Q}{1}$. P das Product ist. (164 §).

Ein solches Product kann einem andern $F \times G$ nur alsdenn gleich seyn, wenn wenigstens ein Factor des

einen

einen mit einem Factor des andern von einerley Art ist. Wenn V und u Einheiten bezeichnen, die mit P und F von einerley Art sind, so kann $\frac{P}{V} . Q =$ $\frac{F}{u} . G$ seyn, und die Zahlen $\frac{P}{V}$, $\frac{F}{u}$ verhalten sich umgekehrt, wie G:Q (194 §). Ist alsdenn auch P mit F von einerley Art, und V mit u einerley; so könnten doch Q und G vielleicht mit P und F nicht von einerley Art seyn. Weil nun wegen der gleichen Producte $\frac{P}{1} . Q = \frac{F}{1} . G$ die Proportion $\frac{P}{1} : \frac{F}{1} = G:Q$ richtig seyn muß, und $\frac{P}{1} : \frac{F}{1} = P:F$ (187 §.) ist: so folgt aus der Gleichheit der Producte P.Q=F.G auch die Proportion P:F=G:Q.

199 §.

1.) Aus der Proportion $A:B = m:n$, wenn auch m und n Irrationalzahlen sind, folgt $n.A = m.B$.

Beweis. Es sey $n.A = m.X$; so ist $m:n = A:X$, (194 §.) und vermöge der Voraussetzung hat man $m:n = A:B$: also auch $A:X = A:B$, (159 §), oder $X:A = B:A$, (178 §.) mithin $X = B$, (162 §.) und $n:A = m.B$.

2.) Aus jeder Proportion $A:B = C:D$ folgt also die Gleichheit der Producte $A \times D = B \times C$.

Beweis. Es ist auch $\frac{A}{1} : \frac{B}{1} = C:D$, oder statt dessen $A:B = \frac{C}{1} : \frac{D}{1}$, (187 §.) also $\frac{A}{1} . D =$

$\therefore D = \frac{B}{1} . C$, oder anstatt dessen $\frac{D}{1} . A = \frac{C}{1}$

B. (num. 1).

3.) Ein Quotient, wie $A : \frac{P}{Q}$ ist mit dem Product $\frac{Q}{P} . A$ einerley.

Beweis. Es sey $A : \frac{P}{Q} = B$, so ist $\frac{P}{Q} : 1 = A : B$, (166 §.) also $P : Q = A : B$ (188 §), und $1 : \frac{Q}{P} = A : B$ (187 §). Daraus aber folgt, es sey $B = \frac{Q}{P} . A$, (164 §), also auch $A : \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P} . A$.

4.) Ein Ausdruck wie $\frac{B \times C}{A}$ ist mit dem Product $\frac{B}{A} \times C$, oder $\frac{C}{A} \times B$ einerley, nachdem A mit B oder mit C von einerley Art ist.

Beweis. Es ist $A : 1 = B \times C : \frac{B \times C}{A}$, (164 §.) und $1 : B = C : B \times C$: (166 §.) also $A : B = C : \frac{B \times C}{A}$, (193 §.) oder $\frac{B \times C}{A} = \frac{B}{A} \times C$.

5.) Aus jeder Proportion $A : B = C : D$ folgt also $D = \frac{B \times C}{A}$.

Beweis.

Beweis. Denn es ist auch $A : B = C : \frac{B \times C}{A}$ (num. 2.), also $C : D = C : \frac{B \times C}{A}$, (159 §.) mithin ferner $D = \frac{B \times C}{A}$. (178. 162. §.)

200 §.

1.) Wenn $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$, Irrationalzahlen; also wenigstens P und Q, R und S, Grössen von einerley Art sind; so ist das Product $\frac{P}{Q}$. $\frac{R}{S} = \frac{P.R}{Q.S}$.

Beweis. Man erinnere sich, daß $P.R$ soviel als $\frac{P}{1}$. R sey, und $Q.S$ soviel, als $\frac{Q}{1}$. S, so hat man ferner

$$\frac{Q}{1}.S : \frac{P}{1}.R = 1 : \frac{P.R}{Q.S} \text{ (168 §.)}$$

$$\frac{P}{1}.R : R = \frac{P}{1} : 1 \text{ (164 §.)}$$

mithin $\frac{Q}{1}.S : R = \frac{P}{1} : \frac{P.R}{Q.S}$ (193 §.).

Ferner multiplicire man das erste und dritte Glied mit der Zahl $\frac{1}{Q}$; so wird $\frac{1}{Q}.\frac{P}{1} = \frac{P}{Q}$ (184 §), und man erhält die Proportion $S : R = \frac{P}{Q}$

$\frac{P}{Q} : \frac{P.R}{Q.S}$ (190 §). Daraus folgt alsdenn $\frac{R}{S}$.

$\frac{P}{Q}$, oder $\frac{P}{Q} . \frac{R}{S}$ (168 §.) $= \frac{P.R}{Q.S}$.

2.) Wenn man die Glieder zweyer oder auch mehrerer Proportionen, wie sie in der Ordnung folgen, mit einander multiplicirt; so sind die Producte wiederum in geometrischer Proportion.

3.) Auch sind die Quotienten einander proportional, wenn man die Glieder einer Proportion nach der Ordnung mit den gleichnahmigen Gliedern einer andern Proportion dividirt, vorausgesetzt, daß diese mit jenen von einerley Art sind.

Beweis. 2. Zwey dergleichen Proportionen A:B=C:D, und E:F=G:H, kann man so ausdrücken $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und $\frac{E}{F} = \frac{G}{H}$. Daraus folgt $\frac{A}{B} . \frac{E}{F} = \frac{C}{D} . \frac{G}{H}$, oder $\frac{A.E}{B.F} = \frac{C.G}{D.H}$ (num. 1.) also A.E:B.F=C.G:D.H.

Wenn aber dieser Satz für zwo Proportionen richtig ist, so muß er eben darum auch für drey gelten. Denn die Glieder der ersten beyden in einander multiplicirt geben eine Proportion, welche man aufs neue mit den gleichnahmigen Gliedern der dritten Proportion multipliciren kann. Eben so gilt der Schluß von jeder Anzahl Proportionen auf die um Eins grössere Anzahl.

3. Aus

3. Aus beyden angenommenen Proportionen folgt auch $A.D = B.C$ und $E.H = F.G$, (199 §. num. 2.) also ferner $\frac{A.D}{E.H} = \frac{B.C}{F.G}$, oder $\frac{A}{E} \cdot \frac{D}{H} = \frac{B}{F} \cdot \frac{C}{G}$, (num. 1.) und das giebt $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$ (194 §).

Der VII. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

201 §.

Wenn eine Seite *AB* eines Dreyecks *ABC* in 95 F. eine beliebige Anzahl gleicher Theile *Aa*, *ab*, *bc*, u. s. f. eingetheilt ist, und durch alle Theilungspuncte, *a*, *b*, *c* u. s. f. die graden Linien *af*, *bg*, *ch*, u. s. w. mit der anliegenden Seite *BC* parallel gezogen werden; so theilen diese die dritte Seite *AC* in eben so viele gleiche Theile.

Beweis. Jede Parallele schneidet auch AC und zwar zwischen A und C, weil sie alle die Seite AB unter dem Winkel $Aaf = ABC$ schneiden, und also durch die Fläche des Dreyecks durchgehen müssen (33 §): also giebt es in AC so viele Theile, als in AB. Durch alle Theilungspuncte *a*, *b*, *c*, u. s. f. ziehe man mit AC die Parallellinien *am*, *bn*, u. s. f. bis an die nächste Parallele: so hat man in den Drey-

ecken Aaf und abm die Seite $Aa = ab$, den Winkel $aAf = bam$, und $Aaf = abm$ (84 §), folglich $am = Af$ (90 §). Aber es ist auch $am = fg$ (98 §): also $Af = fg$. Aus ähnlicher Ursache ist $bn = am$ (90 §) $= fg$, und $bn = gh$ (98 §): also auch $fg = gh$. Da diese Schlüsse von jedem Stück auf das nächstfolgende allemahl gelten; so sind alle Theile in AC gleich groß.

202 §.

95 F. Eine gegebene grade Linie *AC* in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man ziehe durch A eine andre grade Linie AB, die mit AC einen beliebigen Winkel BAC macht. Auf AB nehme man ein Stück Aa von willkührlicher Grösse, und trage es von *a* in *b*, von *b* in *c* u. s. f. so oft auf, (42 §) bis man auf AB so viele Theile hat, als AC haben soll. Wenn nun der letzte Theilungspunct B ist; so ziehe man BC, und durch alle Theilungspuncte *a*, *b*, *c* u. s. f. mit BC Parallellinien: so theilen diese die Linie AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile (201 §).

203 §.

95 Wenn eine grade Linie *DE* zwo Seiten *AB*
96 F. und *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* schneidet, und mit der dritten Seite *BC* parallel liegt: so sind die beyden abgeschnittenen Stücke *AD*, *AE*, den dazu gehörigen Seiten *AB*, *AC* proportional.

Beweis. Dafern AD und AB ein gemeinschaftliches Maaß haben: so sey Aa dieses gemeinschaftliche Maaß, und $AB = m.Aa$. Nun wird man Aa von A nach B *m* mahl auftragen können, und es wird ein Theilungspunct in D fallen. Man ziehe durch

alle

alle Theilungspuncte mit BC Parallellinien: diese werden AC gleichfalls in *m* gleiche Theile eintheilen so, daß $AC = m.Af$ wird. Wenn nun AD *n* solcher Theile enthält, wovon *m* in AB enthalten sind, und also $AD = n.Aa$ ist; so wird auch $AE = n.Af$ seyn (201 §). Man hat also $Aa = \frac{1}{m} AB$, $Af = \frac{1}{m} AC$; ferner $AD = \frac{n}{m} AB$, und $AE = \frac{n}{m} AC$. Nun ist aber $\frac{n}{m} AB : AB = \frac{n}{m} AC : AC$ (174 §), also $AD : AB = AE : AC$, oder $AD : AE = AB : AC$ (182 §).

96 F. Wenn AD und AB kein gemeinschaftliches Maaß haben, und AB in eine beliebige Menge gleicher Theile getheilt wird; so kann nie ein Theilungspunct in D fallen. Aber wenn durch alle Theilungspuncte die graden Linien *af*, *bg*, *ch*, u. s. f. mit BC parallel gezogen werden; so liegt DE zwischen zwoen solchen Parallelen: und wenn D zwischen dem *n*ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AB fällt; so liegt allemahl auch E zwischen dem *n*ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AC. Wenn also $\frac{n}{m} AB < AD$ und $\frac{n+1}{m} AB > AD$ ist: so fällt AE allemahl zwischen eben solchen Gränzen und es ist zugleich $\frac{n}{m} AC <$ AE, und $\frac{n+1}{m} AC >$ AE, was auch *m* und

n für ganze Zahlen bedeuten. Demnach ist auch in diesem Fall AD:AB=AE:AC, (175 §.) oder AD:AE=AB:AC (182 §.).

Es folgt hieraus, daß auch die Stücke DB, und EC zwischen den Parallellinien den beyden andern Stücken AD, AE proportional seyn. Denn es ist auch AB:AD=AC:AE (178 §.) und daraus folgt (189 §.) (dividendo) AB−AD:AD=AC−AE:AE, oder DB:AD=EC:AE, oder auch DB:EC=AD:AE.

Diese beyden Stücke zwischen den Parallellinien sind also ebenfalls den zugehörigen Seiten proportional. Denn die beyden Proportionen AB:AC=AD:AE, und DB:EC=AD:AE geben die dritte AB:AC=DB:EC (159 §.).

204 §.

95 F. Wenn zwo Seiten *AB*, *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* so getheilt sind, daß die beyden Stücke der einen Seite *AB* den beyden Stücken der andern *AC* proportional sind; so ist die grade Linie *DE* durch die Theilungspuncte mit der dritten Seite *BC* parallel.

Beweis. Es sey AD:BD=AE:EC, und DE nicht mit BC parallel: so muß durch D eine andre grade Linie DF mit BC parallel gezogen werden können. Dann aber ist AD:DB=AF:FC (203 §.), und es wird vorausgesetzt, es sey AD:DB=AE:EC, deswegen müste AF:FC=AE:EC seyn, welches nicht angehet. Wenn nämlich F über E fällt: so ist AF < AE, also müste FC < EC seyn (163 §.), welches sich widerspricht. Ein ähnlicher Widerspruch käme heraus, wenn F unter E fiele: demnach muß DE selbst mit BC parallel seyn.

205 §.

205 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, werden von97 F.
dreyen Parallellinien *AC*, *EF*, *BD*, allemahl so geschnitten, daß die Stücke zwischen den Parallellinien *AE*, *EB*, *CF*, *FD* einander proportional sind.

Beweis. Wenn auch AB und CD parallel sind: so ist der Satz für sich klar, weil sodann AE=CF, und EB=FD ist (98 §.). Also AE:EB=CF:FD (158 §.). Wenn aber AB nicht mit CD parallel ist; so sey die grade Linie AG durch A mit CD parallel gezogen, welche BD in G, und EF in H schneidet: alsdenn wird AH=CF, und HG=FD (98 §.). Da nun AE:EB=AH:HG (203 §.), so ist auch AE:EB=CF:FD.

Es ist also auch AE+EB:EB=CF+FD:FD, oder AB:EB=CD:FD, und AE+EB:AE=CF+FD:CF, oder AB:AE=CD:CF.

Umgekehrt: Wenn ein Paar grade Linien *AB*, *CD*, zwischen zwoen Parallelen, *AC* und *BD*, in *E* und *F* so getheilet sind, daß *AE*:*EB*=*CF*:*FD*; so ist *EF* mit *AC* und *BD* parallel. Denn wäre nicht EF, sondern EK mit BD und AC parallel, so wäre auch AE:EB=CK:KD, also CF:FD=CK:KD, welches nicht seyn kann.

Schneiden demnach ein Paar grade Linien AB98 F.
und CD einander in L, und es fällt L zwischen den Parallelen AC, und BD: so ist AL:LB=CL:LD, und AB:AL=CD:CL, auch AB:BL=CD:DL. Denn man kann durch L die dritte Parallele *ef* ziehen, da denn der vorige Beweis gilt.

Auch umgekehrt: Wenn die entgegengesetzten Schenkel AL, LB, CL, LD, der Scheitelwinkel ALC, BLD einander proportional sind; so ist AC # BD. Denn wäre nicht BD # AC; so sey B*d*, welche CD in *d* schneidet, mit AC parallel, und es wird AL : LB = CL : L*d* seyn. Da nun auch AL : LB = CL : LD seyn soll; so müste CL : L*d* = CL : LD, also L*d* = LD seyn, welches nicht seyn kann.

206 §.

99 F. Wenn *AC*, *BD* die beyden parallelen Seiten eines Trapezii *ABDC* sind, und man halbirt die beyden andern Seiten *AB* und *CD* bey *E* und *F*: so ist ist *EF* die halbe Summe der parallelen Seiten *AC* und *BD*.

Beweis. Man halbire AC in G, BD in H, und ziehe EG, HF, imgleichen BC, welche EF in K schneidet. Nun ist einmahl EF # AC # BD (205 §.). Ueberdem AE : EB = AG : GC, und DH : BH = DF : FC; also EG # BC # HF (204. §.) Deswegen ist EK = GC, KF = BH, und EK + KF = EF = GC + BH = $\frac{1}{2}$AC + $\frac{1}{2}$BD oder EF = $\frac{1}{2}$ (AC + BD).

207 §.

100 F. Eine grade Linie *AD*, die den Winkel *BAC* im Dreyeck *ABC* halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite so, daß die Theile *BD*, *DC* sich wie die anliegenden Seiten *AB*, *AC* verhalten.

Und umgekehrt; Wenn eine Seite *BC* des Dreyecks *ABC* in *D* so getheilt ist, daß die Stücke *BD*, *DC* sich wie die anliegenden Seiten

ten *AB*, *AC* verhalten; so halbirt *AD* den gegenüberstehenden Winkel *BAC*.

Beweis. Man verlängere BA, eine von den Seiten, die den Winkel BAC einschliessen, bis E, und mache AE = AC, ziehe sodann CE. Dafern nun

1) BAD = DAC ist; so ist BAC = 2 BAD. Aber auch BAC = 2 E (55. 72 §.). Also 2 BAD = 2 E, und BAD = E; folglich AD # CE (81 §.) und BD : DC = BA : AE (203 §.), oder BD : DC = BA : AC.

2) Wenn umgekehrt BD : DC = BA : AC, also BD : DC = BA : AE ist; so ist AD # EC (204 §) und BAD = E (84 §.). Aber E = $\frac{1}{2}$BAC (55. 72 §.): also BAD = $\frac{1}{2}$BAC.

208 §.

Zu dreyen gegebenen graden Linien *a*, *b*, *c*, die vierte Proportionallinie zu finden. F. 101

Aufl. Man verzeichne einen Winkel A von willkührlicher Grösse. Auf dem einen Schenkel nehme man AB = *a*, und AC = *b*, auf dem andern Schenkel aber AD = *c*, ziehe BD, und durch C mit BD die Parallele CE, welche AD in E schneidet: so ist AE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es ist AB : AC = AD : AE (202 §.): also auch *a* : *b* = *c* : AE.

Wenn *a* = 1 ist; so hat man 1 : *b* = *c* : AE, also AE = *b* × *c* = AC × AD: und wenn *b* = 1 ist; so wird *a* : 1 = *c* : AE, folglich AE = $\frac{c}{a}$ = $\frac{AD}{AB}$ (164. 166 §.). Auch ist überhaupt AE = $\frac{b \times c}{a}$ = AC

$= \frac{AC \times AD}{AB}$ (199 §. n. 5.). Die Allgemeinheit der Begriffe von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen hat veranlasset, daß in der Geometrie Redensarten sind aufgenommen worden, die sonst nur in der Rechenkunst gewöhnlich waren. Eine Linie mit einer Linie multipliciren oder dividiren heißt im ersten Fall: zu einer Linie, die man für Eins annimmt, und zu beyden Factoren, im zweyten Fall zum Divisor, der für Eins angenommenen Linie und dem Dividendo die vierte Proportionallinie suchen. In der Geometrie bedeuten diese Redensarten Constructionen, da sie statt dessen in der Rechenkunst Rechnungsarten mit Zahlen bezeichnen.

209 §.

102 F. Gradlinichte Figuren ABCDEF, *abcdef* heissen ähnliche Figuren, wenn bey einer gleichen Anzahl von Seiten, die Winkel A, B, C, u. s. f. den Winkeln *a*, *b*, *c* nach der Ordnung gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, einander proportional sind. Diese Seiten nennt man die gleichnahmigen Seiten der Figuren, und man braucht das Zeichen (∼), um anzuzeigen, daß eine Figur der andern ähnlich sey.

Figuren, die auf einander passen, sind nicht allein gleiche, sondern auch ähnliche Figuren.

Zwo Figuren sind einander selbst ähnlich, wenn sie einer dritten ähnlich sind. Denn jede zweene nach einander folgende Winkel der beyden ersten Figuren sind alsdenn den gleichnahmigen Winkeln in der dritten, und die Verhältnisse zwoer gleichnahmigen Seiten

ten der beyden ersten dem Verhältniß der gleichnahmigen Seiten in der dritten gleich.

Alle reguläre Polygone, die gleichviel Seiten haben, sind ähnliche Polygone. Denn wenn n die Anzahl der Seiten ist; so ist jeder Winkel sowohl des einen als des andern Polygons $= 2R - \frac{4R}{n}$ (140 §). Weil ferner die Seiten eines jeden Polygons alle unter sich gleich groß sind; so ergiebt sich von selbst, daß auch die gleichnahmigen Seiten proportional seyn müssen.

210 §.

Gleichwinklichte Dreyecke *ABC, DEF* sind einander ähnlich. 103 F.

Beweis. Wenn $B=E$, $A=D$ folglich $C=F$ ist (87 §); so nehme man $BG=EF$, wenn EF die Seite ist, die mit BC zwischen gleichen Winkeln liegt. Durch G ziehe man GH mit AC, und durch G die Linie GI mit AB parallel: so hat man $BHG=A=D$, und $BGH=C=F$ (84 §), also $BH=DE$, $HG=DF$ (90 §) $=AI$ (98 §). Ferner ist $AB:BC=HB:BG$ (203 §) $=DE:EF$, und überdem $AC:BC=AI:BG$ (203 §) $=DF:EF$. Demnach sind die Seiten proportional, welche die gleichen Winkel $B=E$ und $C=F$ einschliessen. Aber die beyden gefundenen Proportionen $AB:BC=DE:EF$, und $AC:BC=DF:EF$, oder $BC:AC=EF:DF$, geben die dritte $AB:AC=DE:DF$ (171 §): also sind auch die Seiten, welche den dritten gleichen Winkel einschliessen, proportional, und die Dreyecke ABC, DEF einander ähnlich (209 §).

211 §.

211 §.

104 F. Wenn die Seiten eines Dreyecks *ABC* den Seiten eines andern *DEF* in eben der Ordnung proportional sind; so sind es ähnliche Dreyecke.

Beweis. Wenn BC und EF ein Paar gleichnahmige Seiten sind; so nehme man BG=EF, und ziehe GH mit AC parallel. Alsdenn wird GH die Seite AB irgendwo in H schneiden, und dann ist BGH=BCA, BHG=BAC: also werden die Dreyecke HBG, ABC einander ähnlich 210 §. Nun ist aber vermöge der Voraussetzung BA:BC=ED:EF, und BA:BC=BH:BG (210 §): also BH:BG=ED:EF, und man erhält BH=ED (162 §), weil BG=EF gemacht ist. Es ist ferner vorausgesetzt, daß BC:AC=EF:DF sey, und man hat überdem BC:AC=BG:HG (210 §): also BG:HG=EF:FD, folglich auch HG=DF (162 §). Aus den dreyen Sätzen aber BG=EF, BH=DE, HG=DF, folgt es sey DEF=B, und DFE=BGH=C: also EDF=A, und das Dreyeck DEF ~ ABC (210 §).

212 §.

104 F. Dreyecke *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben $B=E$, sind ähnliche Dreyecke, wenn auch die Seiten, welche den gleichen Winkel einschliessen *AB*, *BC*, *DE*, *EF* einander proportional sind.

Beweis. Wofern BA:BC=ED:EF ist, und also BA, ED, imgleichen BC, EF gleichnahmige Seiten sind; so schneide man auf BA das Stück BH = der gleichnahmigen Seite ED, und eben so auf BC das Stück BG=EF ab, und ziehe GH: so ist

auch

auch HG=DF, BHG=EDF, HGB=DFE (54 §). Ueberdem aber BA:BC=BH:BG, also HG #AC (204 §), und EDF=BHG=A, F=HGB =C, folglich das Dreyeck DFE∼ABC (210 §).

213 §.

Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, und zwo proportionale Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, sind einander ähnlich, wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite grösser ist, als die an demselben anliegende Seite. 104 F.

Beweis. In den Dreyecken ABC, DEF sey B=E, und BA:AC=ED:DF, überdem AC > BA, also DF > ED (163 §). Man nehme BH= ED, und mache den Winkel BHG=A; so ist das Dreyeck BHG∼ABC (210 §) und BA:AC= BH:HG. Aber vermöge der Voraussetzung ist BA: AC=ED:DF, also auch BH:HG=ED:DF. Weil nun BH=ED: so ist HG=DF, also der Winkel D=BHG (78 §) =A: und weil auch E=B; so ist das Dreyeck ABC∼DEF.

214 §.

Eine grade Linie *AE* von der Spitze des rechten Winkels *A* im rechtwinklichten Dreyeck *ABD* auf die Hypothenuse *BD* senkrecht gezogen theilt das Dreyeck in zwo andre, die unter sich und auch dem ganzen ähnlich sind. 105 F.

Beweis. Die Dreyecke ABD und ABE sind gleichwinklicht, weil BAD=R=AEB, und B beyden Dreyecken gemein ist: also ist ABD ∼ ABE. So sind auch ABD, und ADE gleichwinklicht, weil BAD=R=AED, und D beyden Dreyecken gemein

mein ist: also ist ABD ~ ADE (210 §), mithin auch das Dreyeck ABE ~ ADE (209 §).

Demnach ist die grade Linie AE, welche von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks senkrecht fällt, zwischen den beyden Stücken, worin sie die Hypothenuse theilt, die mittlere Proportionallinie.

Wenn also im Kreise über einen Durchmesser BD eine senkrechte grade Linie EA stehet, die den Kreis in A trift; so ist diese zwischen den beyden zugehörigen Stücken des Durchmessers BE, ED, die mittlere Proportionallinie. Denn die Sehnen AB, AD schliessen mit dem Durchmesser BD ein rechtwinkliches Dreyeck ein, das bey A den rechten Winkel und BD zur Hypothenuse hat (123 §): also ist BE:AE = AE:ED. Auch ist jede von den beyden Sehnen AD oder AB zwischen dem Durchmesser BD und dem an der Sehne anliegenden Theil desselben DE oder BE die mittlere Proportionallinie. Es ist nemlich BD:AD = AD:DE, und BD:AB = AB:BE.

215 §.

106 F. Zwo Secanten des Kreises, die sich irgendwo in *A* schneidem, werden vom Kreise so getheilt, daß die beyden Stücke der einen Secante zwischen beyder Durchschnittspunct *A* und den Durchschnittspuncten mit dem Kreise den ähnlichen beyden Stücken der andern umgekehrt proportional sind.

107 F. Auch wenn eine Tangente und eine Secante des Kreises einander in *A* schneiden; so ist das Stück der Tangente, das zwischen *A* und dem Berührungspunct liegt, zwischen den beyden Stücken der Secante, die sich von *A* bis an

den

den Kreis erstrecken, eine mittlere Proportionallinie.

Beweis. Es mag der Durchschnittspunct A innerhalb oder ausserhalb des Kreises fallen: so werden zwo grade Linien BE, und DC allemahl ein Paar Dreyecke ABE, ADC geben, worinn der Winkel EAB = DAC (27 §.) und BCD = BED (123 §.) ist. Also wird das Dreyeck ABE ~ ADC (210 §.), und AB: AD = AE: AC.

Wenn aber AF den Kreis in D berühret, und 107
AC ihn in B und C schneidet; so ziehe man BD, CD. F.
Nun ist CBD = A + ADB, und CDF = A + ACD (72 §.). Aber CBD = CDF (135 §.), also A + ADB = A + ACD, und ADB = ACD. Den Winkel A haben die beyden Dreyecke DAC, und ADB gemein: also ist das Dreyeck DAC ~ ADB (210 §.) und AC: AD = AD: AB.

216 §.

Zwischen zwoen gegebenen graden Linien 105
a, b, eine mittlere Proportionallinie zu finden. F.

I. Aufl. Man trage auf einer willkührlich gezogenen graden Linie BD zuerst BE = a auf, und addire dazu b (42 §.) so, daß ED = b, und BD = $a + b$ wird. Die Summe BD halbire man in C, und verzeichne aus C mit dem Halbmesser CB = CD = $\frac{1}{2}(a+b)$ einen Kreis. Durch E ziehe man eine grade Linie auf BD senkrecht, diese wird den Kreis in A schneiden, und EA wird die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn (214 §.).

II. Aufl. Man kann auch so verfahren. Auf 107
einer willkührlich gezogenen graden Linie AC nehme F.
man AC = a, AB = b; über BC = AC − AB = $a - b$ setze man ein gleichschenklichtes Dreyeck BGC,

und mit dem Halbmesser GB = GC verzeichne man aus dem Mittelpunct G einen Kreis: so wird A ausserhalb dieses Kreises fallen (77 §.). Durch A ziehe man eine Tangente des Kreises AD (126 §.): so wird AD die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn (215 §.).

217 §.

Aehnlichliegende, oder auch gleichnahmige Diagonallinien sind in ähnlichen Figuren solche, die man in beyden Figuren zwischen den Spitzen gleichnahmiger Winkel ziehet.

Man verlangt, daß diese Diagonallinien ganz innerhalb der Fläche der Figur liegen sollen, und dies wird bey einer jeden graden Linie von einem Winkelpunct zum andern zutreffen, wenn die Figur lauter auswärtsgehende Winkel hat: nicht aber bey einer jeden solchen Linie, wenn unter den Winkeln der Figur auch einwärtsgehende vorkommen, wie in der 65. Fig. Eine grade Linie von C nach F gezogen würde hier nicht ganz in der Fläche der Figur ABCDEFGHI fallen.

Wenn die Figur lauter auswärtsgehende Winkel hat, wie in der 102 F.: so lassen sich die Diagonallinien AC, AD, u. s. f. alle so ziehen, daß sie in der Spitze eines Winkels, wie A, zusammenstossen.

Wäre A ein einwärtsgehender Winkel, und die übrigen alle auswärtsgehende; so würde dies noch angehen. Aber, wenn mehr auswärtsgehende Winkel vorkommen, wie in der 108 F. so wird es nicht allemahl angehen.

Figuren von der letztern Art aber lassen sich allemahl in Figuren der erstern Art eintheilen, wenn man zwischen den Spitzen der auswärtsgehenden Win-

Winkel Diagonallinien, wie DG, DK u. s. f. ziehet: da denn jede dieser Figuren für sich, wie vorhin, durch Diagonallinien, die in der Spitze eines Winkels zusammenstossen, in Dreyecke getheilt werden kann.

Ein Paar ähnliche Figuren mögen also, zu der einen oder andern Art gehören, so kann man sie allemahl durch gleichnahmige Diagonallinien in ähnlichliegende Dreyecke eintheilen, das ist, in solche, die entweder zwischen gleichnahmigen Seiten und Diagonallinien, oder auch zwischen dreyen gleichnahmigen Diagonallinien liegen.

218 §.

Aehnlichliegende Dreyecke in ähnlichen Figuren sind ähnliche Dreyecke. 102 F.

Beweis 1) Wenn zwo Seiten solcher Dreyecke zugleich gleichnahmige Seiten der ähnlichen Figuren sind, wie AB, *ab*, BC, *bc*, in den Dreyecken ABC, *abc*; so folgt die Aehnlichkeit der beyden Dreyecke aus dem 212 §. Denn es ist nun $B = b$, und $AB : ab = BC : bc$.

2) Rechnet man nun diese Dreyecke ABC, *abc*, von beyden Figuren ab: so bleiben ACDEF und *acdef* auch noch ähnliche Figuren. Denn es ist $BCD = bcd$, und $BCA = bca$, also $BCD - BCA = bcd - bca$, oder $ACD = acd$. Ueberdem ist auch $AC : ac = BC : bc = CD : cd$: also sind auch ACD und *acd* ähnliche Dreyecke, und es sind ADEF, *adef* wieder ähnliche Figuren; auch ist das Dreyeck $ADE \sim ade$. So gilt der Schluß von jedem Dreyeck auf das nächstfolgende, und deswegen sind alle ähnlichliegende Dreyecke einander ähnlich.

108 Weil ähnliche Figuren, die einwärtsgehende Win-
F. kel haben, wie ABCDEFGHIK und *abcdefghik* sich in Figuren der ersten Art durch ähnlichliegende Diagonallinien eintheilen lassen (217 §.): so muß der Satz auch von ähnlichen Figuren dieser Art gelten.

In ähnlichen Figuren verhält sich also jedes Paar ähnlichliegender Diagonallinien, wie sich zwo gleichnahmige Seiten der Figuren verhalten.

219 §.

102 Die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren
108 verhalten sich wie jedes Paar gleichnahmiger
F. Seiten, oder Diagonallinien.

Beweis. Man hat folgende Proportionen:

AB : *ab* = AB : *ab* = AC : *ac*
BC : *bc* = AB : *ab* = AC : *ac*
CD : *cd* = AB : *ab* = AC : *ac*
DE : *de* = AB : *ab* = AC : *ac*.

Also AB + BC + CD + DE : *ab* + *bc* + *cd* + *de* = AB : *ab* = AC : *ac* (191 §.). Hieraus erhellet soviel, daß ein Paar Stücke des Umfangs ähnlicher Figuren wie ABCDE, *abcde*, sich wie AB : *ab*, oder AC : *ac* verhalten, wenn diese Stücke aus einer gleichen Anzahl nach einander folgender gleichnahmiger Seiten zusammengesetzt sind. Aber man sieht leicht, daß jedesmahl noch die beyden folgenden Seiten EF, *ef* zu den vorigen Summen addirt werden können, ohne daß sich das Verhältniß der Summen ändert. Dieserwegen gilt der Satz für die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren.

110 Wenn EF, *ef*, zwo Seiten ähnlicher regulärer
F. Polygone, CE, *ce*, ihre grösten Halbmesser, CB, *cb*, ihre kleinsten Halbmesser sind; so sind nicht allein

die

die Dreyecke ECF, *ecf*, sondern auch ECB, *ecb*, einander ähnlich (210 §.). Demnach sind nicht allein die grösten Halbmesser CE, *ce*, mit den kleinsten Halbmessern CB, *cb*, in einerley Verhältniß; sondern auch die Seiten EF, *ef*, und eben darum auch die ganzen Peripherien der ähnlichen regulären Polygone verhalten sich, wie ihre grösten oder kleinsten Halbmesser.

220 §.

Zwo gradlinichte Figuren *ABCDEF*, *abcdef*, 102
die aus einer gleichen Anzahl ähnlicher Drey= 108
ecke, in einerley Ordnung, so zusammenge= F.
setzt sind, daß jedes Dreyeck wie *ABC*, *abc*, mit dem folgenden *ACD*, *acd* eine Seite *AC*, *ac* gemein hat, sind ähnliche Figuren.

Beweis. Alle Seiten der einen Figur sind den gleichnahmigen Seiten der andern proportional, und die gleichnahmigen Winkel in den beyden Figuren sind ebenfalls gleich groß. Denn es sind entweder die gleichen Winkel der Dreyecke selbst, wie ABC, *abc*, oder die Summe zweener, oder mehrer solcher gleichen Winkel, wie BCD = BCA + ACD = *bca* + *acd* = *bcd*; oder auch in der 108 F. BCD = BCA + ACK + KCD = *bca* + *ack* + *kcd* = *bcd*. Diesemnach sind die Figuren einander ähnlich (209 §.).

221 §.

Wenn eine Linie kleiner ist, als die Periphe= 109
rie eines Kreises: so kann man im Kreise ein F.
reguläres Polygon beschreiben, dessen Um=
fang grösser als diese Linie ist.

Beweis. Es sey P des Kreises Umfang, und eine Linie L < P. Wenn alsdenn CF ein Halbmesser des Kreises ist; so nehme man L : P = CF : CG,

und es wird G auſſer dem Kreiſe fallen. Durch G ſey eine Tangente des Kreiſes GH gezogen, und auf der andern Seite vom Berührungspunct HI = HG genommen; ſo wird die grade Linie CI den Umfang des Kreiſes in K ſchneiden, und der Bogen FHK deſſen Hälfte HF = HK iſt, hat ſeine beſtimmte Gröſſe. Wenn hiernächſt n eine ganze Zahl, alſo $\frac{1}{n}$ P einen aliquoten Theil von der Peripherie des Kreiſes bezeichnet; und wenn eben dieſe Zahl ſo groß angenommen wird, daß $\frac{1}{n}$ P < Bogen FHK ausfällt (139 §. Rech.); ſo iſt der Umfang des regulären Polygons, welches n Seiten hat, gröſſer als L. Denn man nehme $HA = HB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ P, ſo daß der Bogen $AHB = \frac{1}{n}$ P wird, und ſeine Sehne AB eine Seite des Polygons. Man ziehe die Halbmeſſer CA, CB, welche die Tangente in D und E ſchneiden: ſo wird CD < CG, und CD = CE, auch iſt DE die Seite eines ähnlichen um den Kreis beſchriebenen regulären Polygons. Ferner iſt $CA = CF$; mithin $\frac{CA}{CD} > \frac{CF}{CD}$ (149 §.), alſo auch $\frac{CA}{CD} > \frac{L}{P}$. Es iſt aber $\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$ (219 §.) $= \frac{nAB}{nDE}$ (181 §.): alſo auch

$\frac{nAB}{nDE}$

$\frac{n\text{AB}}{n\text{DE}} > \frac{\text{L}}{\text{P}}$, und nAB ist des in dem Kreise, nDE aber des um den Kreis beschriebenen Polygons Umfang, wenn n die Anzahl der Seiten ist.

Ferner ist $\text{P} < n\text{DE}$, also $\frac{n\text{AB}}{\text{P}} > \frac{n\text{AB}}{n\text{DE}}$ (149 §.); folglich $\frac{n\text{AB}}{\text{P}} > \frac{\text{L}}{\text{P}}$ und $n\text{AB} > \text{L}$, oder der Umfang des Polygons im Kreise grösser, als die Linie L.

Der Unterschied des Umfangs eines solchen Polygons im Kreise von dem Umfange des Kreises kann also kleiner werden, als jede gegebene Linie.

222 §.

Wenn eine Linie grösser ist, als die Peripherie eines Kreises; so kann man um den Kreis ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Umfang kleiner, als diese Linie ist.

Beweis. Es sey eine Linie λ grösser, als P, wenn wiederum P die Peripherie des Kreises bedeutet. Auf dem Halbmesser CF nehme man nun das Verhältniß $\text{CG} : \text{CF} = \lambda : \text{P}$: so fällt wiederum G auser dem Kreise, weil $\lambda > \text{P}$, also $\text{CG} > \text{CF}$ ist. Durch G ziehe man die Tangente CH, und nehme $\text{HI} = \text{HG}$, ziehe CI, welche die Peripherie des Kreises in K schneidet. Wenn man nun n so groß nimmt, 109 F.

daß $\frac{1}{n}\text{P} < \text{FK}$ wird; und um den Kreis ein reguläres Polygon verzeichnet, das n Seiten hat, so ist der Umfang dieses Polygons kleiner, als λ.

Denn es sey wiederum $HB = HA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} P$, so daß $AB = \frac{1}{n} P$ wird. Man ziehe CA, CB, welche mit der Tangente in D, E zusammenstossen: so ist DE eine Seite des verlangten Polygons, so wie AB die Seite des ähnlichen Polygons im Kreise ist. Ueberdem ist $CD < CG$ (77 §.) und $CA = CF$: also $\frac{CD}{CA} < \frac{CG}{CF}$ (183 §), folglich auch $\frac{CD}{CA} < \frac{\lambda}{P}$. Da nun $\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{nDE}{nAB}$: so ist $\frac{nDE}{nAB} < \frac{\lambda}{P}$. Weil aber nDE der Umfang des äussern, und nAB der Umfang des innern Polygons ist; so ist $P > nAB$ (183 §): folglich $\frac{nDE}{P} < \frac{nDE}{nAB}$, also auch $\frac{nDE}{P} < \frac{\lambda}{P}$, und $nDE < \lambda$, oder der Umfang des äussern Polygons kleiner als die Linie λ.

Demnach kann auch der Unterschied des Umfangs eines solchen Polygons um den Kreis vom Umfange des Kreises kleiner werden, als jede gegebene Linie. Weil übrigens CD:CA das Verhältniß der Peripherie des äussern regulären Polygons zur Peripherie des ähnlichen innern Polygons ist, so kann der Exponent dieses Verhältnisses kleiner werden, als jede Zahl, wie $\frac{CG}{CF}$, welche Eins so wenig als man will übertrift.

223 §.

223 §.

Die Durchmesser D, d zweener Kreise C, c, 110
verhalten sich gegeneinander, wie ihre Peri- F.
pherien P, p.

Beweis. Die vierte Proportionallinie zu D, P und d sey L, so daß $D:P=d:L$ ist, und überdem sey $L<p$. Man verzeichne im Kreise c ein reguläres Polygon, dessen Umfang $\pi>L$ (221 §) und im Kreise C ein ähnliches Polygon, dessen Umfang $=\Pi$ ist: so hat man $\Pi:D=\pi:d$ (219 §). Es ist aber vermöge der Voraussetzung $D:P=d:L$; also $\Pi:P=\pi:L$ (171 §). Weil nun $\pi>L$ ist, so müßte $\Pi>P$ seyn gegen den 138 §.

Die vierte Proportionallinie zu D, P, und d sey nun λ so, daß $D:P=d:\lambda$, und es sey $\lambda>p$. Man verzeichne um den Kreis c ein reguläres Polygon, dessen Umfang $q<\lambda$ (222 §) und um den Kreis C ein ähnliches Polygon, dessen Umfang Q ist: so hat man $Q:D=q:d$ (219 §). Es ist aber vermöge der Voraussetzung $D:P=d:\lambda$, also wäre $Q:P=q:\lambda$ (171 §). Aber es ist $q<\lambda$; also wäre $Q<P$, gegen den 144 §.

Wenn demnach die vierte Proportionallinie zu D, P, und d, weder grösser, noch kleiner, als p seyn kann; so ist $D:P=d:p$, oder $D:d=P:p$ (182 §).

224 §.

In gleichen Kreisen verhalten sich die Win- 111
kel am Mittelpunct ACD, ACB gegeneinander, 112
wie die Bogen AD, AB, zwischen ihren F.
Schenkeln.

Beweis. Wenn die Bogen AB, AD ein ge- 111
meinschaftliches Maaß haben: so sey AE dieses ge- F.
meinschaftliche Maaß, und $AB=nAE$, $AD=mAE$:

so wird sich AE von A nach B $n$mahl und von A nach D $m$mahl auftragen lassen. Wenn man nun von C nach allen Theilungspuncten die Halbmesser CE u. s. f. ziehet: so wird der Winkel $ACB = nACE$, und $ACD = mACE$ (118 §). Man hat also $AE = \frac{1}{m} AD$, und $ACE = \frac{1}{m} ACD$, folglich $AB = \frac{n}{m} AD$, und $ACB = \frac{n}{m} ACD$. Da nun $ACD : \frac{n}{m} ACD = AD : \frac{n}{m} AD$ (174 §): so ist auch $ACD : ACB = AD : AB$.

112 F. Wenn aber die Bogen AB, AD kein gemeines Maaß haben, und man theilt den grössern Bogen AD in so viele Theile, als man will, wovon jeder $= AE$ sey: so wird B allemahl zwischen zweenen Theilungspuncten fallen so, daß wenn zwischen A und B sich n Theilungspuncte befinden, $nAE < AB$, und $(n+1)AE > AB$ ist. Ziehet man nun die Halbmesser CE u. s. f. nach allen Theilungspuncten, und B fällt zwischen dem $n$ten und $(n+1)$ten Theilungspunct: so wird allemahl zugleich CB zwischen der $n$ten und $(n+1)$ten Theilungslinie fallen so, daß $nACE < ACB$, und $(n+1)ACE > ACB$ ist. Weil nun $AE = \frac{1}{m} AD$, und $ACE = \frac{1}{m} ACD$ ist: so hat man allemahl zugleich $\frac{n}{m} ACD < ACB$, und $\frac{n+1}{m} ABD > AGB$, wenn $\frac{n}{m} AD < AB$, und

$\frac{n+1}{m}$

$\frac{n+1}{n}$ AD > AB ist. Deswegen ist auch in diesem Fall ACD:ACB=AD:AB (175 §).

Jeder Winkel also verhält sich zum rechten Winkel, wie der Bogen, den man mit beliebigem Halbmesser aus der Spitze, als dem Mittelpunct, zwischen seinen Schenkeln beschreibt, zum Quadranten der ganzen Peripherie, wovon dieser Bogen ein Stück ist.

In gleichen Kreisen verhalten sich also auch die Winkel an der Peripherie AGD, AFB, wie die Bogen AD, AB zwischen ihren Schenkeln. Denn es ist AD:AB=ACD:ACB=$\frac{1}{2}$ACD:$\frac{1}{2}$ACB (181 §)=AGD:AFB (122 §).

225 §.

Wenn in ungleichen Kreisen, deren Peripherien *p*, *P* sind, zweene Winkel am Mittelpunct *ACB*, *DEF* gleich groß sind: so sind die Bogen *AB*, *DF* zwischen ihren Schenkeln den zugehörigen Peripherien also auch den Durchmessern oder Halbmessern (223 §) proportional. 113 F.

Umgekehrt: Wenn ein Paar Bogen *AB*, *DF* ungleicher Kreise, sich wie ihre Peripherien verhalten: so sind die zugehörigen Winkel am Mittelpunct gleich groß.

Beweis. Man setze CG auf AC, und EH auf ED senkrecht: so ist AB:AG=ACB:ACG, und DF:DH=DEF:DEH (224 §). Weil nun ACG =DEH (21 §) und vermöge der Voraussetzung ACB =DEF: so ist DF:DH=ACB:ACG, also AB:AG =DF:DH (159 §) und AB:4AG=DF:4DH (190 §), oder AB:*p*=DF:P, weil 4AG=*p*, und 4DH =P, oder auch AB:DF=*p*:P (182 §).

Wenn

Wenn umgekehrt AB:p=DF:P ist: so sey AG ein Quadrant von p, DH ein Quadrant von P, und man ziehe CG, EH. Nun ist auch AB:$\frac{1}{4}p$=DF:$\frac{1}{4}$P (190 §), oder AB:AG=DF:DH; ferner AB:AG=ACB:ACG, und DF:DH=DEF:DEH (224 §): also ACB:ACG=DEF:DEH. Da nun ACG=R=DEH (116 §): so ist auch ACB=DEF.

114 226 §.

115 Es sind ABC, DEF ein Paar krumme Linien, und
F. AG, DH ein Paar grade Linien, welche die krummen in den Puncten A und D berühren, so daß die Lage oder Richtung der krummen Linie ABC in A mit der Lage von AG, und die Lage der krummen Linie DEF in D mit der Lage von DH übereinkommt. Ferner sind AB, DE ein Paar den ganzen Linien ABC, DEF proportionale Stücke. Wenn nun die Tangenten BK und EL durch B und E gegen die vorigen AG, DH einerley Lage haben, und dies allemahl, wie groß oder klein auch AB, und DE genommen worden, daferne sie nur allemahl proportionale Theile der ganzen Linie ABC, DEF bleiben: so sind die krummen Linien ABC, DEF einander ähnlich.

116 Dies ist der Begriff der Aehnlichkeit des 209 §,
F. nur so verändert, wie es der Natur krummer Linien gemäß ist. Eine gebrochene Linie ABCD, ist einer andern *abcd* ähnlich, wenn ihre graden Theile AB, *ab*, BC, *bc*, CD, *cd*, u. s. f. nach der Ordnung in einerley Verhältniß stehen, welches also mit dem Verhältnisse der ganzen Linien einerley ist, und die Winkel ABC, *abc*; BCD, *bcd* u. s. f. zwischen den proportionalen Theilen gleich groß sind. Das heißt mit andern Worten: wenn dergleichen gebrochene Linien

in

in proportionalen Entfernungen von ihren Anfangspuncten A, *a*, ihre vorige Lage oder Richtung gleichviel verändern; so sind sie einander ähnlich (die Entfernungen rechnet man hier in der gebrochnen Linie selbst von A nach B, ferner von A durch B nach C, von A durch B und C nach D u. s. f. so, daß hier das Wort Entfernung den Weg anzeigt, den ein Punct A nehmen muß, nach C oder D zu kommen, ohne aus der Linie ABCD herauszugehen.) Ihre erste Lage war AF, *af*, diese ändern sie beyde in B, *b* so, daß AB:*ab*=ABCD:*abcd*. Ihre neue Lage BC, *bc*, macht mit der ersten den Winkel CBF =*cbf*. Diese Lage ändern sie abermahl in C, *c* so, daß die Linie ABC: Linie *abc*=ABCD:*abcd*, und die neue Lage macht mit der ersten den Winkel DEF =*def* u. s. f. Bey den krummen Linien ABC, DEF kömmt die erste Lage in A und D mit der Lage der Tangenten überein, und in jedem folgenden Punct ist hier die Lage anders, als in dem vorhergehenden. Wenn demnach dergleichen krumme Linien in proportionalen Entfernungen von den Anfangspuncten ihre vorige Lage gleichviel verändern, das ist, wenn ihre Tangenten in proportionalen Entfernungen von den Anfangspuncten mit den ersten Tangenten gleiche Winkel machen: so sind es ähnliche Linien.

227 §.

Alle Kreise sind einander ähnlich, auch alle Kreisbogen, die ihren Peripherien proportional sind, ebenfalls ähnliche Bogen. 117 F.

Auch umgekehrt: ähnliche Kreisbogen sind ihren Peripherien proportional.

Beweis. Wenn CA, ED ein Paar Halbmesser zweener Kreise sind; so ziehe man durch A und D

die

die Tangenten AM, DN. Man nehme ein Paar Bogen AB, DF, die sich wie die ganzen Kreislinien verhalten, und ziehe durch B und F die Tangenten BG, FH: so ist der Winkel ACB = DEF (225 §): also auch AGB = DHF, weil AGB + ACB = 2R = DHF + DEF (89 §) und BGM = FHN. Folglich sind die Kreise einander ähnlich.

Sind nun AK und DL ein Paar Kreisbogen, die ihren Peripherien proportional sind, und man nimmt AB : DF = AK : DL d. i. AB : DF = *p* : P: so erhellet, wie vorhin, daß BGM allemahl = FHN sey, deswegen sind AK, DL ähnliche Bogen.

Umgekehrt: Wenn AB, DF ähnliche Kreisbogen sind; so ist der Winkel BGM = FHN, also auch ACB = DEF, und AB : DF = *p* : P.

Also verhalten sich ähnliche Kreisbogen, wie die Durchmesser, oder Halbmesser ihrer Peripherien: auch verhalten sich ähnliche Kreisbogen, wie ihre Sehnen, und die zu ähnlichen Bogen gehörigen Winkel am Mittelpunct sind gleich groß (225 §).

228 §.

117 F. Ausschnitte *ACBQ*, *DEFR*, und Abschnitte *AQB*, *DRF*, die zu ähnlichen Bogen gehören, sind ähnliche Figuren.

Beweis. In den Ausschnitten sind die Winkel bey A und D, B und F, C und E gleich groß, und AC : DE = BC : FE = Bog : AQB : Bog : DRF (227 §).

Der Abschnitte AQB, DRF Winkel bey A und D, B und F sind gleich. Denn CAB = EDF, und CBA = EFD, also BAG = FDH, GBA = HFD. Ueberdem der Bogen AQB : Bog. DRF = AB : DF (227 §).

229 §.

229 §.

Aehnliche Abschnitte fassen gleiche Winkel (123 §) und wenn Abschnitte gleiche Winkel fassen: so sind es ähnliche Abschnitte. 117 F.

Beweis. Die Winkel GAB, HDF, und GBA, HFD ähnlicher Abschnitte müssen gleich groß seyn (209 §): also sind auch die Winkel in den Abschnitten gleich groß, denn sie sind jener Ergänzungen zu 2R (135 §). Umgekehrt also: wenn die Abschnitte gleiche Winkel fassen; so ist GAB=HDF=GBA =HFD, also auch G=H (87 §), und ACB=DEF (89 §), folglich AQB∼DRF (225 §).

Der VIII. Abschnitt.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

230 §.

Man kann ein Paar Verhältnisse auf ähnliche Art mit einander vergleichen, wie oben im VI Abschnitt ein Paar einzelne Grössen mit einander verglichen wurden. Denn da ein Verhältniß grösser, oder kleiner, als das andre seyn kann (160 §); so kann man auch fragen: wie groß denn ein Verhältniß gegen das andre sey? ob es nemlich noch mahl so groß, oder dreymahl so groß, oder halb so groß sey, u. s. f. als ein andres Verhältniß? Wenn man eine solche Vergleichung zwischen einzelnen Grössen A und B anstellet; so prüfet man, ob entweder die eine A ganz, oder doch ein aliquoter Theil von ihr in der andern B etliche mahl enthalten sey. Eben so muß man bey Vergleichung

gleichung der Verhältnisse verfahren. Aber man muß sich vor allen Dingen eine richtige Vorstellung davon machen, wie sich ein Verhältniß aus seinen Theilen zusammensetzen lasse. Jede einzelne Grösse läßt sich auf mannigfaltige Art in gleiche, oder ungleiche, viele oder wenige Theile eintheilen, und es ist mit denen Verhältnissen nicht anders beschaffen. Man lernt sich in dieser Sache am besten finden, wenn man bis auf die ersten Begriffe von den Verhältnissen so, wie sie im 151 § u. f. f. sind erklärt worden, zurücke gehet.

231 §.

Auf die Frage: wie viel gilt ein Thaler? kann man kurz antworten: 24 Gr. machen einen Thaler, und das heißt angeben, 1 Thaler verhalte sich zum Groschen wie 24 zu 1. Eben dies Verhältniß des Thalers zum Groschen, liesse sich durch eine Art von Umweg auch so angeben: 3 Mark machen einen Thaler, und 8 Groschen ein Mark. Es folgt hieraus, wie man leicht siehet, daß 24 Groschen einen Thaler machen: indessen liegen in dieser Antwort folgende zwo Proportionen:

Thal : Mark = 3 : 1,
Mark : Gr : = 8 : 1,

und beyde Verhältnisse, des Thalers zum Mark, und des Marks zum Groschen, kann man als Theile ansehen, welche zusammen das ganze Verhältniß des Thalers zum Groschen ausmachen. Diesemnach sind auch die Verhältnisse 3 : 1, und 8 : 1, oder welches einerley ist, die Verhältnisse 24 : 8 und 8 : 1 als Theile des Verhältnisses 24 : 1 anzusehen.

232 §.

232 §.

Dieser Gedanke läßt sich ohne Schwierigkeit allgemeiner machen. Wenn man das Verhältniß einer Grösse A zur zweyten B, und wiederum das Verhältniß der zweyten B zu einer dritten C angiebt; so giebt man zugleich das Verhältniß der ersten A zur dritten C an, und dies Verhältniß A:C, ist aus den beyden A:B, und B:C, zusammengesetzt. Hätte man demnach ein Paar Proportionen von dieser Art:

$$A:B = m:n$$
$$B:C = p:q.$$

so erhellet, daß man auch sagen könne, das Verhältniß A:C sey aus den beyden Verhältnissen $m:n$, und $p:q$ zusammengesetzt, weil das Verhältniß $m:n$ mit A:B, und $p:q$ mit B:C einerley ist. Also sind die Verhältnisse $m:n$, und $p:q$, oder A:B, und B:C, als Theile anzusehen, welche zusammen das ganze Verhältniß A:C ausmachen. Man pflegte dies so auszudrücken $A:C = \binom{m:n}{p:q}$.

Wenn also Thl:Mark = 3:1
Mark:Gr: = 8:1
so ist Thl:Gr: $= \binom{3:1}{8:1}$.

233 §.

Es ist hiebey vor allen Dingen anzumerken, daß auf die Grösse der einzelnen Glieder der Verhältnisse hier gar nichts ankomme: denn ein und eben, dasselbe Verhältniß läßt sich auf unzählig viele verschiedene Arten ausdrücken (188 §).

Wäre $A:B=4:5$
$B:C=7:23$

so wäre auch

$A:B=8:10$
$B:C=21:69$

und es wäre einerley, ob man sagte, das Verhältniß A:C sey zusammengesetzt aus den Verhältnissen 4:5, und 7:23, oder aus den Verhältnissen 8:10, und 21:69. Es ist hier die Rede blos von der Grösse der Verhältnisse, und gar nicht von der Grösse ihrer einzelnen Glieder.

234 §.

Wären beyde Verhältnisse A:B, und B:C gleich groß; wäre

$$A:B=m:n$$
$$B:C=m:n:$$

so bestünde das Verhältniß A:C aus zweenen gleich grossen Theilen, davon jeder = A:B, oder = $m:n$, oder = B:C ist. Demnach ist in diesem Fall das Verhältniß A:C doppelt so groß, als A:B, oder $m:n$, und A:B, oder $m:n$ ist die Hälfte des Verhältnisses A:C. Es heißt nun A:C das verdoppelte Verhältniß von $m:n$ (ratia duplicata ipsius $m:n$) und $m:n$ heißt von A:C die ratio subduplicata. Man kann hier wie im 232 § schreiben; $A:C = \binom{m:n}{m:n}$.

235 §.

In einer stetigen Proportion ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum dritten doppelt so groß, als das Verhältniß des ersten zum zweyten.

Beweis.

Beweis. Es sey $A:B = B:C$, und $A:B = m:n$; so ist auch $B:C = m:n$ (159 §), also $A:C = \binom{m:n}{m:n}$ (234 §).

236 §.

Das Verhältniß zwoer Quadrat-Zahlen gegen einander ist doppelt so groß, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $AA:BB = A:\frac{BB}{A}$ (173 § Rech.) und $A:B = B:\frac{BB}{A}$ (178 § Rech.). Also $A:\frac{BB}{A} = \binom{A:B}{A:B}$ (235 §) und $AA:BB = \binom{A:B}{A:B}$ (159 §).

Demnach ist das Verhältniß der Wurzeln halb so groß, als das Verhältniß ihrer Quadratzahlen.

237 §.

Bey dieser Art, die Verhältnisse zu vergleichen, muß man Verhältnisse und Quotienten nicht für einerley halten. Im VI Abschnitt konnte dies geschehen, weil daselbst die Untersuchung nur vornämlich darauf abzielte, Kennzeichen der Gleichheit der Verhältnisse festzusetzen. War $\frac{B}{A} = m$: so war $A:B = 1:m$, und man konnte immer ein Verhältniß statt des andern brauchen. Wäre nun $\frac{C}{A} = 2m$, und man wollte daraus schliessen, es sey das Verhältniß C:A

C:A doppelt so groß, als das Verhältniß B:A: so würde dies ein grosser Fehler seyn. Es ist z. E. $\frac{12}{4} = 3$, und $\frac{24}{4} = 6$, also der Bruch oder Quotient $\frac{24}{4}$ doppelt so groß, als $\frac{12}{4}$: aber dem ohnerachtet ist das Verhältniß 24:4 keinesweges doppelt so groß, als das Verhältniß 12:4. Man müste sonst zwischen 24 und 4 eine mittlere Zahl x setzen können, so, daß das Verhältniß $24:x$ und $x:4$ dem Verhältniß 12:4 gleich wäre. Sollte aber $x:4 = 12:4$ seyn; so wäre $x = 12$ (162 §.), und es ist falsch, daß $24:12 = 12:4$ sey.

Es ist dies eine Erinnerung, die für Kenner unnöthig, für Anfänger aber um so nothwendiger ist, da einige unbestimmte Redensarten, die hier in der Lehre von den Verhältnissen nicht ungewöhnlich sind, leicht zu Verwirrungen Gelegenheit geben können. Der Herr von Leibnitz hat eben dies schon erinnert, bey Gelegenheit einer Streitigkeit mit Joh. Bernoulli, die hier noch nicht erörtert werden kann, und der Hr. Hofrath Kästner macht im 1. Theil seiner Anfangsgründe der Mathem. im 1. §. des VI. Cap. eben diese Anmerkung. Man vergleiche hiemit aus Hausens Elementis Matheseos auf der 56 und 57 S. die 4. Def. mit der beygefügten Erläuterung. In der Vorrede, welche Herr Professor Hindenburg dem ersten Theil der vom Herrn Lempe aufgesetzten Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie vorangesetzt hat, findet man ebenfalls einige hieher gehörige nützliche Erinnerungen.

238 §.

Alle Verwirrung aber wird bey dieser Sache leicht vermieden, wenn man folgendes merket. Es ist nicht ungewöhnlich zu sagen, daß der Exponent eines Verhältnisses B:A, die Grösse dieses Verhältnisses ausdrückt, und wenn man die Sache genau ansiehet: so ist die Redensart zweydeutig. Sie kann einmahl so viel heissen: der Exponent *m* drückt die Grösse des einen Gliedes *B* dieses Verhältnisses, genau das andre *A* aus, und dies hat seine völlige Richtigkeit (153 §.). Eben die Redensart könnte auch wohl so erklärt werden: der Exponent *m* drückt die Grösse des Verhältnisses *B* : *A* gegen ein andres Verhältniß aus, dessen Grösse man als bekannt ansiehet, und in diesem Verstande genommen ist der Satz keinesweges allgemein richtig. Wenn man frägt: wie groß ist eine einzelne Grösse B gegen eine andre A? so ist dies ganz etwas anders, als wenn man so frägt: wie groß ist das Verhältniß B : A gegen ein andres bekanntes Verhältniß? Die Vergleichung der Exponenten der Verhältnisse, als einzelner Grössen, mit einander ist also ganz etwas andres, als die Vergleichung der Verhältnisse untereinander selbst, wie solches die weitere Ausführung dieser Lehre mit mehrern ergeben wird.

239 §.

Die im 131 §. als ein Exempel gebrauchte Frage: wie viele Groschen gehen auf einen Thaler? liesse sich auch so beantworten: $1\frac{1}{2}$ Gulden machen einen Thaler, ein Gulden giebt 2 Mark, und ein Mark giebt 8 Groschen. So unnöthig ein solcher Umweg in einem so bekannten Exempel scheinen möchte; so noth-

wendig sind oft noch grössere Umwege, wenn man mit unbekannten Verhältnissen zu thun hat, deren Grösse man erstlich suchen muß. Es liegen in dieser Antwort 3 Proportionen

Thl. : Guld. = $1\frac{1}{2} : 1$
Gulden : Mark = 2 : 1
Mark : Groschen = 8 : 1.

Dies ist noch immer eben so viel gesagt, als wenn man auf einmahl antwortete: 24 Gr. machen einen Thaler. Denn 8 Gr. zweymahl genommen geben 16 Gr. und 16 Gr. anderthalb mahl genommen geben 24 Gr. Man giebt aber nun drey Verhältnisse an, die als Theile zusammengenommen das ganze Verhältniß des Thlrs. Gr. oder 24:1 ausmachen. Hätte man demnach überhaupt 3 Proportionen von dieser Art:

$$A : B = m : n$$
$$B : C = p : q$$
$$C : D = r : s$$

so wäre das Verhältniß A : D aus den dreyen A:B, B:C, C:D, oder $m:n$, $p:q$, $r:s$ als Theilen zusammengesetzt. Dies kann man kurz so ausdrücken:

$$A : B = \begin{pmatrix} m:n \\ p:q \\ r:s \end{pmatrix}.$$

240 §.

Es können die drey Theile, woraus das ganze Verhältniß bestehet, gleich groß seyn, wie wenn die 3 Proportionen diese wären:

$$A : B = m : n$$
$$B : C = m : n$$
$$C : D = m : n.$$

In diesem Fall ist das Verhältniß A:D dreymahl so groß, als A:B, oder $m:n$; und $m:n$, oder A:B ist $\frac{1}{3}$tel des Verhältnisses A:D. Es heist nun A:D die ratio triplicata von A:B oder $m:n$, und A:B oder $m:n$ die ratio subtriplicata, von A:D. Dies läßt sich also auf die Art ausdrücken:

$$A:D = \begin{pmatrix} m:n \\ m:n \\ m:n \end{pmatrix}.$$

241 §.

Wenn vier Grössen in einer stetigen Proportion sind; so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum vierten dreymahl so groß, als das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweyten.

Beweis. Es sey $A:B=B:C=C:D$, und $A:B=m:n$: so ist auch

$$B:C = m:n$$
$$C:D = m:n \text{ (159 §.)}.$$

Demnach $A:D = \begin{pmatrix} m:n \\ m:n \\ m:n \end{pmatrix}$ (240 §.).

oder $A:D = \begin{pmatrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{pmatrix}$.

242 §.

Das Verhältniß zwoer Cubikzahlen gegeneinander ist dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $A^3:B^3 = A:\frac{B^3}{A^2}$ (173 §. Rech.) und $A:B = B:\frac{B^2}{A} = \frac{B^2}{A}:\frac{B^3}{A^2}$ (178 §.

(178 §. Rech.). Also $A : \frac{B^3}{A^2} \left(\begin{matrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{matrix}\right)$ (241 §),

und $A^3 : B^3 = \left(\begin{matrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{matrix}\right)$ (159 §.).

Demnach ist das Verhältniß der Cubikwurzeln $\frac{1}{3}$ des Verhältnisses ihrer Würfel.

243 §.

Ein Verhältniß, das aus zwoen oder dreyen andern als Theilen ist zusammengesetzt worden, ist einerley mit dem Verhältniß der Producte der gleichnahmigen Glieder der Theile dieses Verhältnisses gegeneinander.

Beweis. Es sey $\alpha : \beta = A : B$,
und $\gamma : \delta = B : C$

so ist $A : C = \left(\begin{matrix} \alpha:\beta \\ \gamma:\delta \end{matrix}\right)$ (232 §.). Aber $B = \frac{A\beta}{\alpha}$

(199 §. num. 5.), also wird $\gamma : \delta = \frac{A\beta}{\alpha} : C$, und

$C = \frac{A\beta\delta}{\alpha.\gamma}$. Dies giebt $\frac{C}{A} = \frac{\beta\delta}{\alpha.\gamma}$, oder

$A : C = \alpha.\gamma : \beta.\delta$.

Hätte man nun ausser den Proportionen

$\alpha : \beta = A : B$
$\gamma : \delta = B : C$
noch diese $\varepsilon : \zeta = C : D$

so wäre $A : D = \left(\begin{matrix} \alpha:\beta \\ \gamma:\delta \\ \varepsilon:\zeta \end{matrix}\right)$ (239 §.).

Es ist aber vermöge des bewiesenen $\alpha.\gamma:\beta.\delta = A:C$, und überdem $\varepsilon:\zeta = C:D$, also aus eben dem Grunde auch $\alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta = A:D$.

Verhältnisse also, die aus zweyen oder dreyen gleichen Verhältnissen sind zusammengesetzt worden, sind gleich groß. Wäre nemlich nicht allein

$$A:B = \begin{pmatrix} f:g \\ h:i \\ k:l \end{pmatrix},$$

sondern auch

$$C:D = \begin{pmatrix} m:n \\ o:p \\ q:r \end{pmatrix};$$

so hätte man $A:B = f.h.k:g.i.l$, und $C:D = m.o.q:n.p.r$.

Ist alsdenn ferner

$$f:g = m:n$$
$$h:i = o:p$$
$$k:l = q:r$$

so folgt daraus $f.h.k:g.i.l = m.o.q:n.p.r$, (200 §. n. 2.) also ferner $A:B = C:D$ (159 §.).

Der IX. Abschnitt.

Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

244 §.

Dreyecke *ABC*, *DEF*, die gleich hoch sind, 118 verhalten sich wie ihre Grundlinien *BC*, *EF*.

Beweis. Wenn BC die grössere Grundlinie ist: so nehme man BG = EF, und ziehe AG: so ist das

Dreyeck ABG = DEF (106 §.). Ist nun BH das gemeinschaftliche Maaß von BG und BC so, daß BG $= n$BH, BC $= m$BH, also BH $= \frac{1}{m}$ BC und BG $= \frac{n}{m}$ BC ist: so trage man BH auf BG n mahl auf (42 §.) und ziehe die graden Linien AH u. s. f. nach allen Theilungspuncten in BC. Hiedurch erhält man Dreyecke, die alle = ABH sind, auf ABG gehen so viele, als BG, und auf ABC so viele, als BC Theile hat, so, daß ABH $= \frac{1}{m}$ ABC, und ABG $= \frac{n}{m}$ ABC wird. Weil nun ABC : $\frac{n}{m}$ ABC = BC : $\frac{n}{m}$ BC, und $\frac{n}{m}$ ABC = ABG = DEF, $\frac{n}{m}$ BC = BG = EF: so ist ACB : DEF = BC : EF.

Dafern BC und BG oder EF kein gemeinschaftliches Maaß haben; so mag man BC in so viele gleiche Theile, als man will, eintheilen, es wird allemahl G zwischen zweenen Theilungspuncten fallen. Wenn aber BC $= m$BH ist, es mag m so groß seyn als man will, und G fällt zwischen dem $n$ten, und $(n+1)$ten Theilungspunct: so wird auch AG zwischen der $n$ten und $(n+1)$ten Theilungslinie fallen. Man hat also allemahl zugleich $\frac{n}{m}$ ABC < ABG und $\frac{n+1}{m}$

$\frac{n+1}{m}$ ABC ▷ ABG, wenn $\frac{n}{m}$ BC ◁ BG und $\frac{n+1}{m}$ BC ▷ BG ist. Demnach ist auch in diesem Fall ABC:ABG=BC:BG, oder ABC:DEF=BC:EF (175 §).

Gleich hohe Parallelogramme verhalten sich also ebenfalls wie ihre Grundlinien: denn ein Paar Dreyecke auf eben den Grundlinien von eben der Höhe sind ihre Hälften (181 §).

245 §.

Dreyecke *ABC*, *DEF*, die gleiche Grundli- 119
nien haben, verhalten sich wie ihre Höhen. F.

Beweis. Des Dreyecks ABC Höhe sey CG, und FH des Dreyecks DEF Höhe, wenn beyder Grundlinien BC, EF, gleich groß sind. Man ziehe BG, EH; so sind BGC, HEF rechtwinklichte Dreyecke, und BC, EF, ihre gleichen Höhen, wenn CG, FH für ihre Grundlinie genommen werden (104 §). Demnach ist GBC:HEF=GC:HF (244 §), und überdem GBC=ABC, HEF=DEF (106 §), also auch ABC:DEF=GC:HF.

Diesemnach verhalten sich auch Parallelogramme auf gleichen Grundlinien wie ihre Höhen.

246 §.

Das Verhältniß zweyer Dreyecke oder Pa- 120
rallelogramme gegen einander ist aus den Ver- F.
hältnissen ihrer Grundlinien und Höhen zu-
sammengesetzt.

Beweis. Wenn GB des Dreyecks ABC Höhe und DH des Dreyecks DEF Höhe ist; so nehme man BK=DH, und ziehe KC. Nun ist ABC:

KBC

KBC = GB : KB (245 §), und KBC : DEF = BC : EF; (244 §), also ABC : DEF = $\begin{pmatrix} GB : KB \\ BC : EF \end{pmatrix}$ (233 §).

Wenn man nun auf jeder Grundlinie BC, EF zweyer Parallelogramme LC, EM, denen die Höhen BG, DH, zugehören, in gleicher Höhe mit dem Parallelogramm LC das Dreyeck ABC, und in gleicher Höhe mit dem andern EM das Dreyeck DEF setzt: so ist LC = 2ABC, und EM = 2DEF (106 §): also LC : EM = ABC : DEF (181 §) = $\begin{pmatrix} GB : KB \\ BC : EF \end{pmatrix}$

247 §.

Ist L die Seite eines Quadrats Q: so ist sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe desselben = L (104 §). Wenn also eines andern Quadrats q, Seite = l ist; so hat man Q : q = $\begin{pmatrix} L : l \\ L : l \end{pmatrix}$: also ist das Verhältniß zweyer Quadrate das doppelte Verhältniß ihrer Seiten.

103 F. Wenn die Höhen AM, DN, zweyer Dreyecke oder Parallelogrammen sich wie die Grundlinien BC, EF verhalten; so ist das Verhältniß derselben ebenfalls das verdoppelte Verhältniß der Grundlinien oder Höhen, und ein Paar Quadrate, welche dieselben Grundlinien oder Höhen hätten, würden sich eben so verhalten. Demnach verhalten sich Dreyecke, oder Parallelogramme, wie die Quadrate ihrer Grundlinien oder Höhen, wenn das Verhältniß ihrer Grundlinien mit dem Verhältniß ihrer Höhen einerley ist.

Nimmt

Nimmt man in ähnlichen Dreyecken ABC, DEF zwo gleichnahmige Seiten BC, EF, für die Grundlinien an, womit die Höhen AM, DN, zusammen gehören; so wird das Dreyeck ABM∼DEN (220 §), also AM : DN = AB : DE, und AB : DE = BC : EF (209 §), folglich auch AM : DN = BC : EF. Demnach verhalten sich ähnliche Dreyecke, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten.

248 §.

Weil $ABC : DEF = LC : EM = \begin{pmatrix} BG : DH \\ BC : EF \end{pmatrix}$ $= BG \times BC : DH \times EF$ (243 §); so verhalten sich Dreyecke und Parallelogramme auch, wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Dafern nun BC : EF = DH : BG ist; so hat man BG × BC = DH × EF. Wenn also die Grundlinien sich umgekehrt, wie die Höhen verhalten; so sind die Dreyecke oder Parallelogramme gleich.

Und wenn die Seite eines Quadrats zwischen den beyden Seiten eines Rechtecks die mittlere Proportionallinie ist; so ist das Quadrat dem Rechteck gleich.

Umgekehrt: wenn die Dreyecke oder Parallelogramme gleich sind; so verhalten sich die Grundlinien umgekehrt, wie die Höhen. Denn nun ist BG × BC = DH × EF: also BC : EF = DH : BG (198 §).

Und wenn ein Quadrat einem Rechteck gleich ist: so ist die Seite desselben zwischen den Seiten des Rechtecks die mittlere Proportionallinie.

Auf dieser Vergleichung der Rechtecke unter sich und mit den Quadraten gründet sich eine Art die

Recht-

Rechtecke zu bezeichnen, wenn ihre Seiten gegeben sind, ohne daß man nöthig hat das Rechteck in der Figur würklich zu zeichnen. Sind a und b die zwo Seiten desselben; so schreibt man es so $a \times b$. Denn wenn c und d zwo Seiten eines andern Rechtecks sind, das man eben so bezeichnet $c \times d$: so ist es gleichviel, ob man das Verhältniß der Rechtecke selbst, oder das Verhältniß der Producte $a \times b, c \times d$ braucht, weil beyde Verhältnisse gleich sind.

249 §.

121 F. Wenn zwey Parallelogramme BD, FM, oder Dreyecke ABC, EFG, einen gleichen Winkel haben $B = F$, und wenn die Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschliessen, einander umgekehrt proportional sind; so sind die Dreyecke, oder Parallelogramme, gleich groß.

Auch umgekehrt: wenn gleich grosse Parallelogramme oder Dreyecke einen gleichen Winkel haben; so sind die Seiten an dem gleichen Winkel einander umgekehrt proportional.

Beweis. Wenn AK, EL die Höhen dieser Figuren sind; so ist das Dreyeck $ABK \sim EFL$, und $EF : AB = EL : AK$. Ist also 1) $BC : FG = EF : AB$: so ist auch $BC : FG = EL : AK$; also $ABC = EFG$, und $BD = FH$ (248 §). 2) Wenn aber diese letzte Gleichheit vorausgesetzt wird; so folgen jene Proportionen rückwärts.

250 §.

81 F. Das Rechteck beyder Diagonallinien eines im Kreise beschriebenen Vierecks $AC \times BD$ ist so groß, als die Summe der Rechtecke jeder zwoer einander gegenüber stehender Seitenlinien $AD \times BC \times AB \times CD$.

Beweis.

Beweis. Man mache den Winkel ABE=CBD, so ist auch, wenn man EBD zu jedem von beyden addirt, ABD=EBC. Ferner ist BCA=BDA (123 §), also das Dreyeck BDA∼BCE, und man hat BC:CE=BD:DA, folglich BC × DA=CE × BD. Weiter ist das Dreyeck BEA∼BCD, weil BAC=BDC (123 §), und ABE=CBD: also AB:AE=DB:DC, und AB × DC=AE × DB. Addirt man nun gleiches zu gleichem, so findet man BC × DA × AB × DC=(CE × AE) BD, oder AC × BD=AD × BC × AB × CD.

251 §.

Alle ähnliche gradlinichte Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten oder Diagonallinien.

Beweis. Wenn man die Figuren nach dem 217 102 § in ähnlichliegende Dreyecke eintheilt; so ist das 108 Verhältniß von jedem Paar solcher ähnlichliegender F. Dreyecke=ABq:*abq*=ACq:*acq* u. s. f. Also ist das Verhältniß der Summe aller Dreyecke in der einen Figur zur Summe aller Dreyecke in der andern, oder das Verhältniß der einen ganzen Figur gegen die andre eben so groß (191 §).

Die Seiten zweyer ähnlichen regulären Polygone verhalten sich wie ihre größten oder kleinsten Halbmesser (219 §): also verhalten sich die Flächen dieser ähnlichen regulären Polygone, wie die Quadrate ihrer größten oder kleinsten Halbmesser.

252 §.

Wenn zwischen den Schenkeln ungleicher 122 Winkel *ACB*, *DEF* aus den Spitzen *C* und *E* 123 mit ungleichen Halbmessern *CA*, *ED*, die Bo- F. gen *AB*, *DF* beschrieben sind; so ist das Ver-

hältniß

hältniß der Winkel *ACB*, *DEF* aus den beyden Verhältnissen der Bogen *AB*, *DF*, und der zugehörigen Halbmesser verkehrt genommen *ED*, *CA*, zusammengesetzt.

Beweis. Man nehme den Winkel ACG=R =DEH; so sind AG, DH Quadranten, die zu den Peripherien *p*, P, gehören. Nun ist ACB : R = AB : $\frac{1}{4}p$, und R : DEF = $\frac{1}{4}$P : DF. Also hat man

$$\text{ACB} : \text{DEF} = \begin{pmatrix} \text{AB} : \frac{1}{4}p \\ \frac{1}{4}\text{P} : \text{DF} \end{pmatrix} (233\,\S) = \frac{1}{4}\text{P} \times \text{AB} :$$

$\frac{1}{4}p \times$ DF (243 §) = P × AB : *p* × DF (181 §), oder

$$\text{ACB} : \text{DEF} = \begin{pmatrix} \text{AB} : \text{DF} \\ \text{P} : p \end{pmatrix} (233\,\S).$$

Weil nun P : *p* = ED : CA (223 §); so ist auch ABC : DEF = $\begin{pmatrix} \text{AB} : \text{DF} \\ \text{ED} : \text{CA} \end{pmatrix}$.

253 §.

Ausschnitte gleicher Kreise verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen, oder auch wie ihre Winkel am Mittelpunct.

111 Beweis. Wenn man im 224 § statt der Win-
112 kel am Mittelpunct ACB, ACD die Ausschnitte F. ACBE, ACDE verstehet, und auf diese die Schlüsse des Beweises eben so anwendet, wie sie dort auf die Winkel am Mittelpunct angewandt wurden; so erhellet daraus zugleich die Richtigkeit der Proportion ACDE : ACBE = AD : AB. Weil sich überdem verhält der Winkel ACD : Wink. ACB = AD : AB; so ist zugleich ACDE : ACBE = Wink. ACD : Wink. ACB.

111 F Jeder Ausschnitt verhält sich also zur Kreisfläche, wie der Bogen des Ausschnitts zur ganzen Peripherie.

Denn

Denn wenn in der 111 F. ACD ein rechter Winkel ist; so ist ACDE ein Quadrant der Kreisfläche. Aber alsdenn ist ACBE:ACDE=AB:AD, und ACBE:4ACDE=AB:4AD (190 §): da dann 4ACDE die ganze Kreisfläche, und 4AD die Peripherie ist.

254 §.

Ein Kreis-Ausschnitt *ACBD* ist einem 124
Dreyeck *EFH* gleich, dessen Grundlinie *FH* so F.
groß als der Bogen *ADB*, und dessen Höhe *EF* so groß, als der Halbmesser *AC* des Ausschnitts ist.

Beweis. Man setze es sey FG der Peripherie P des Kreises gleich, wozu der Ausschnitt gehöret: so ist die Kreisfläche, wozu der Ausschnitt gehöret, dem Dreyecke EFG gleich (150 §). Diese Kreisfläche sey=C: so hat man zwo Proportionen ACBD:C= ADB:P=FH:FG (253 §) und EFH:EFG= FH:FG (244 §). Diese geben die dritte ACBD: C=EFH:EFG, und überdem ist C=EFG: also ist auch ACBD=EFH (162 §).

255 §.

Kreisflächen, ähnliche Kreisausschnitte, und ähnliche Kreisabschnitte verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Halbmesser oder Durchmesser.

Das Verhältniß der ähnlichen Abschnitte ist auch gleich dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

Beweis. Der einen Kreisfläche C Peripherie 124
sey P, der andern Kreisfläche *c* Peripherie sey *p*. 125
Man verzeichne zwo Dreyecke EFG, *efg* und mache F.
die Grundlinien FG=P, *fg*=*p*, die Höhen EF=

AC, $ef = ac$; so hat man $P : p = AC : ac$ (223 §), also $FG : fg = EF : ef$. Demnach ist $EFG : efg = EFq : efq$ (247 §) $= ACq : acq$. Da aber $EFG = C$, und $efg = c$: so ist auch $C : c = ACq : acq$.

Wenn der Bogen $ADB \sim adb$ ist, und man macht $FH = ADB$, und $fh = adb$; so ist wiederum $ADB : adb = AC : ac$ (227 §): also $FH : fh = EF : ef$, und $EFH : efh = EFq : efq = ACq : acq$ (247 §). Da nun $EFH = ACDB$, und $efh = acdb$ (254 §): so ist auch $ACDB : acdb = ACq : acq$.

Man ziehe nun die Sehnen AB, und ab; so ist der Winkel $ACB = acb$ (227 §) und $AC : ac = BC : bc$ (158 §): also das Dreyeck $ACB \sim acb$ (212 §) und $ACB : acb = ACq : acq$ (250 §). Aber auch $ACDB : acdb = ACq : acq$. Also $ACDB - ACB : acdb - acb = ACq : acq$ (180 §), oder der Abschnitt $ADB : Absch. adb = ACq : acq$.

Das Verhältniß der Quadrate der Durchmesser ist mit dem Verhältniß der Quadrate der Halbmesser einerley, weil das verdoppelte Verhältniß der Halbmesser und Durchmesser einerley ist (243 §); auch ist das Verhältniß der Halbmesser mit dem Verhältniß der Sehnen ähnlicher Bogen einerley: also ist auch das Verhältniß ähnlicher Abschnitte einerley mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

256 §.

Eine Figur quadriren heißt ein Quadrat verzeichnen, das der gegebenen Figur gleich ist.

Wenn ein Rechteck gegeben ist; so sucht man nach dem 216 §. zwischen den Seiten desselben eine mittlere Proportionallinie: diese ist die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrats (248 §.).

Ist

Ist die gegebene Figur ein schiefwinklichtes Parallelogramm, oder ein Dreyeck: so sucht man nach dem 105, oder 107 §. ein eben so grosses Rechteck, und quadrirt dieses, wie vorhin gewiesen ist.

Statt eines gegebenen regulären Polygons quadrirt man, wie vorhin, das demselben gleiche Dreyeck (143 §.).

Ist eine irreguläre gradlinichte Figur gegeben; so sucht man nach dem 110 §. ein eben so großes Rechteck, welches sich sodann statt der Figur quadriren läßt.

Vorausgesetzt, daß man eine grade Linie finden könne, die dem Umfange eines Kreises gleich ist, läßt sich auch der Kreis, oder ein Abschnitt, oder Ausschnitt des Kreises quadriren; wenn das Verhältniß des dem Abschnitt, oder Ausschnitt, zugehörigen Bogens zur Peripherie durch ein Verhältniß zwoer grader Linien gegeben ist. Man müste nach dem 150 §. ein der ganzen Kreisfläche, und nach dem 254 §. ein dem Ausschnitte gleiches Dreyeck suchen, welches sich dann statt des Kreises, oder des Ausschnitts quadriren liesse. Von der Quadratur des Ausschnitts hinge dann zugleich die Quadratur des Abschnitts zwischen dem zugehörigen Bogen, und der Sehne ab. Denn diese Sehne schneidet ein Dreyeck ab, und man könnte nun die Differenz der dem Ausschnitt und dem Dreyeck gleichen Quadrate nach dem 113 §. suchen.

257 §.

Den Durchmesser eines Kreises zu finden, der so groß ist, als die Summe zweener andern Kreise C, c, deren Durchmesser AB, AC gegeben sind. 126 F.

Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel BAC, und mache seine Schenkel AB, AC so groß, als die Durchmesser der gegebenen Kreise: so ist die Hypothenuse BC des rechtwinklichten Dreyecks ABC der Durchmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Der Kreis, dessen Durchmesser die Hypothenuse ist, heisse K: so ist $ABq:ACq=C:c$ (255 §.), also $ABq+ACq:ACq=C+c:c$ (189 §), oder $BCq:ACq=C+c:c$ (111 §.). Ferner ist $BCq:ACq=K:c$ (255 §.), also $K:c=C+c:c$, und $K=C+c$ (162 §.).

Der Durchmesser eines Kreises C, welcher so groß ist, als die Differenz eines grössern Kreises K von einem kleinern c, wird demnach gefunden, wenn man auf dem einen Schenkel des rechten Winkels BAC den Durchmesser AC des kleinern Kreises nimmt, und aus dem Mitrelpunct C mit dem Durchmesser CB des grössern K einen Kreis beschreibt, der den andern Schenkel in B schneidet: alsdenn ist AB der Durchmesser des gesuchten Kreises. Denn ist C der diesem Durchmesser zugehörige Kreis; so ist vermöge des Beweises $K=C+c$ also $K-c=C$.

Dieser Beweis gründet sich auf den Pythagorischen Lehrsatz, und auf die Eigenschaft der Kreise, daß ihr Verhältniß gegen einander mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Durchmesser einerley ist. Weil dies nun eine allgemeine Eigenschaft aller ähnlichen Figuren ist, daß sie sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten oder Diagonallinien verhalten; so gilt der Satz mit gehöriger Veränderung von allen ähnlichen Figuren, wenn statt der Durchmesser der Kreise gleichnahmige Seiten oder Diagonallinien

nallinien ähnlicher Figuren, oder auch die Sehnen ähnlicher Kreis-Abschnitte verstanden werden.

Wenn nemlich die Summe der Quadrate zwoer solcher gleichnahmigen Linien in zwoen ähnlichen Figuren so groß ist, als das Quadrat einer gleichnahmigen Linie einer ähnlichen dritten Figur; so ist diese dritte Figur so groß, als die Summe der beyden vorigen.

258 §.

Vermöge des vorigen Satzes ist in der 126 Fig. die halbe Kreisfläche CAB der Summe der beyden halben Kreisflächen BDA + AEC gleich. Wenn nun von dem Halbkreise BAC die beyden Abschnitte AGB und AHC abgehen; so bleibt das Dreyeck ABC übrig: wenn aber von den beyden Halbkreisen ADB, AEC eben die Abschnitte AGB, AHC abgehen, so bleiben die beyden Figuren ADBG, und AECH übrig. Beyde zusammen sind also dem gradlinichten Dreyeck ABC gleich, oder einem der Dreyecke AKB, AKC, wenn AB = AC, und AK eine senkrechte Linie auf BC ist. Diese Figuren ADBG, AECH, werden von ihrer Gestalt **Mönchen** (lunulae) genannt. Man kann sie quadriren, weil man die ihnen gleichen Dreyecke quadriren kann (256 §.). Sie werden von dem Erfinder dieser Quadratur, **Mönchen des Hippocrates**, (lunulae Hippocratis) genannt. Aber dergleichen besondre Quadraturen solcher Figuren, die von Kreisbogen eingeschlossen sind, haben in der Ausübung eben keinen Nutzen. 126 F.

Anwendung der Rechenkunst auf die ebene Geometrie.

Der X. Abschnitt.

Von der Ausmessung grader Linien und Winkel.

259 §.

Bey allen Messungen nimmt man eine gewisse Grösse, die mit demjenigen, was man messen will, von einerley Art ist, als bekannt an. Diese Grösse heißt das Maaß, und sie ist nichts anders, als die Einheit, womit man die auszumessende Grösse vergleicht, um das Verhältniß einer solchen Grösse gegen diese Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Ein jedes Maaß ist an sich willkührlich: inzwischen hat man nun allenthalben eingeführte bestimmte Maaße, und das Maaß ist bey jeder Messung eine gegebene Grösse.

260 §.

Bey Ausmessung grader Linien muß also eine bestimmte Länge für das Maaß angenommen werden, und es ist fast durchgängig eingeführt, ohngefähr die Länge des Fußes eines erwachsenen Menschen dafür anzunehmen, daher man auch dieses Maaß einen Fuß nennet. Eine Länge von zehn Füßen heißt eine Ruthe, der zehnte Theil des Fußes ein Zoll, der zehnte Theil eines Zolls eine Linie, und der zehnte Theil einer Linie ein Scrupel. Diese Eintheilung aber ist nur bey den Geometern gewöhnlich, und dies

des-

deswegen, weil auf solche Art die kleinern Theile des Maaßes vortheilhaft durch Decimalbrüche ausgedrückt werden können. Dies erleichtert die Rechnung sehr, nicht allein, wenn man genannte Zahlen von dieser Art auf andere Namen bringen soll (146. 147 §. Rech.), sondern auch in allen übrigen Fällen, wenn man mit solchen genannten Zahlen die vier Rechnungsarten vornehmen soll, wie der VIIIte Abschnitt der Rechenkunst zur Genüge zeiget.

261 §.

Es ist sonst im gemeinen Leben mehr gewöhnlich, den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien u. s. f. zu theilen, da dann 12 Fuß, wiewohl auch an manchen Orten 15, auch 16 Fuß, eine Ruthe machen. Auf einen Klafter, einen Faden, eine Lachter werden 6 Fuß gerechnet. Man kann das geometrische Maaß mit seiner Eintheilung das Decimal-Maaß, das gemeine aber, wenn Ruthen, Fuße u. s. f. allemahl in 12 gleiche Theile getheilet werden, das Duodecimal-Maaß nennen.

262 §.

Hat man beym geometrischen Messen eben den Fuß, oder eben die Ruthe gebraucht, die sonst nach gemeiner Art in zwölf gleiche Theile getheilt wird; so kann man die Zahlen, welche Decimal-Maaß ausdrücken, leicht auf Duodecimal-Maaß bringen, und umgekehrt, wenn man nach dem 148 §. der Rechenkunst verfährt. Man muß aber vorläufig diese Sätze merken, die aus beyden Arten der Eintheilung folgen.

Eine Decimal-Ruthe hat 10 Fuß, 100 Zoll, 1000 Linien, 10000 Scrupel.

Ein Decimal-Fuß hat 10 Zoll, 100 Linien, 1000 Scrupel.

Ein Decimal-Zoll hat 10 Linien, 100 Scrupel.

Eine Duodecimal-Ruthe hat 12 Fuß, 144 Zoll, 1728 Linien, 20736 Scrupel.

Ein Duodecimal-Fuß hat 12 Zoll, 144 Linien, 1728 Scrupel.

Ein Duodecimal-Zoll hat 12 Linien, 144 Scrupel. Frägt man nun: 3 Zoll 6 Linien Decimal-Maaß, wie viel sind es Linien in eben dem Maaß nach der Duodecimal-Eintheilung? so ist der Ansatz:

10 Dec. Z. — 12 Duod. Z. — 3 Z. 6 Lin. Dec.?

× 10 × 12 × 10

100 Lin. 144 Duod. L. 36 Lin.

also die Antwort: $\frac{36}{100}$ 12 Zoll $= \frac{36}{100}$ 144 Linien $= 51,84$ Linien, oder fast 52 Lin. Hiebey wird vorausgesetzt, daß der gebrauchte Fuß derselbe sey. Wäre aber die Ruthe schon in 10 Fuße getheilt worden; so müßte man ansetzen:

10 Dec. F. — 12 Duod. F. — 3 Z. 6 L. Dec. M.?

× 100 × 144 × 10

1009 Lin. 1728 36 Lin.

und man findet das Facit: $= \frac{36}{1000}$ 12 Duod. Fuß $= \frac{36}{1000}$ 1728 Duodecimal-Lin. $= 62,408$, oder fast $62\frac{1}{2}$ Duodecimal-Linien.

263 §.

In der Theorie nimmt man es als eine mögliche Voraussetzung an, daß es allemahl angehe, eine grade Linie vermittelst eines gegebenen Maaßstabes zu messen, ob es gleich in der Ausübung mancherley Schwierigkeiten hat. Bey graden Linien, die auf dem Papier gezeichnet sind, läßt sich die Sache leicht ver-

vermittelst des Circul-Instruments bewerkstelligen, wenn der Maaßstab gegeben, oder willkührlich angenommen ist. Das letzte ist hier allemahl erlaubt: denn an sich ist es ganz willkührlich, welche Linie man eine Ruthe, einen Fuß nennen will. Man nimmt hier gewöhnlich eine sehr kleine Linie für eine Ruthe an, und theilt diese übrigens eben so in Füße, Zolle u. s. f., wie es im grossen gewöhnlich ist. Ein solches verkleinertes Maaß pfleget man auch ein verjüngtes Maaß zu nennen.

264 §.

Man ziehe also eine grade Linie AB, trage auf der- 127
selben von A nach B hin 10 kleine gleiche Theile bis F. G: so wird AG = 10 Ruthen, wenn jeder Theil für eine Ruthe gelten soll. Nun fasse man die Linie AG, und trage sie weiter von G nach H, von H nach B u. s. f. so weit man Platz hat, oder es für nöthig findet: so wird jede Abtheilung, wie GH = HB u. s. f. 10 Ruthen lang. Die kleinern Theile zähle man von G nach A, und setze die Ziffern von 1 bis 10 dabey: die grössern Abtheilungen aber zählt man am bequemsten von G nach B, so daß bey H die Zahl 10, bey B die Zahl 20, u. s. f. ihre Stelle erhält. Die auf solche Art eingetheilte grade Linie dient als ein verjüngter Maaßstab, den man bey Zeichnungen auf dem Papier gebrauchen kann. Die kleinen Theile, welche hier Ruthen bedeuten sollen, lassen sich nun nicht füglich mehr in 10 gleiche Theile, oder Füße, so unmittelbar theilen: in dieser Absicht hat man verschiedene Vortheile ersonnen, die Maaßstäbe so einzutheilen, daß man auch ungemein kleine Theile sehr genau haben kann, wovon die ausübende Mathematik weitern Unterricht ertheilen muß.

265 §.

127 Eine grade Linie *CD* auf dem Papier zu F. messen, wenn der Maaßstab *AB* gegeben ist.

Aufl. Man fasse CD zwischen den Spitzen des Circul-Instruments, setze die eine Spitze in einem der Hauptheilungs-Puncte, wie H oder B. Fällt nun die andre Spitze noch über A hinaus; so gehe man so lange nach B zurück, bis diese andre Spitze entweder in A selbst, oder zwischen A und G fällt. Trift sie nun auch einen Theilungspunct zwischen A und G; so zählt man die Anzahl der Ruthen von der einen Spitze zur andern. Fällt aber die zwote Spitze zwischen zweenen Theilungs-Puncten; so muß man nach dem Augenmaaße bey dieser Einrichtung des Maaßstabes nur schätzen, ob noch etwa $\frac{1}{4}$, oder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{4}$ einer Ruthe zu der ganzen Anzahl von Ruthen zu setzen sey, die zwischen den Spitzen fallen. Wenn man in der 127 Fig. die Linie CD zwischen dem Circul-Instrument fast, und die eine Spitze in B setzt: so wird die andre dahin fallen, wo der Bogen EF mit dem Halbmesser CD beschrieben diese Linie schneidet. Dies erfolgt hier zwischen 27 und 28 Ruthen, und CD ist etwa $27\frac{1}{4}$ Ruthe, oder 27 Ruthen, 2 Fuß, 5 Zoll lang.

Ist die gegebene Linie länger, als der Maaßstab gezeichnet ist; so kann man sie in Theile eintheilen, und jeden Theil, wie vorhin, messen: oder man kann den ganzen Maaßstab so oft auftragen, als es angehet, und sodann den übrigen Rest, wie vorhin, messen. So findet man $LQ = 36\frac{1}{2}$ Ruthen, nemlich $LB = 30$ Ruthen, und $PQ = 6\frac{1}{2}$ Ruthen.

266 §.

266 §.

Auf einer graden Linie *LM* ein Stück von 127 *L* angerechnet aufzutragen, das nach einem F. bekannten Maaßstab in Zahlen ausgedruckt ist.

Aufl. Soll z. E. LM 18 Ruthen lang seyn: so setze man die eine Spitze des Circul-Instruments auf dem gegebenen Maaßstabe in H, und öfne das Instrument so weit, bis die andre Spitze in dem 18ten Theilungspunct, von H angerechnet, trift. Diese Länge trage man von L nach M auf (42 §). Sollten es 28 Fuß seyn; so müßte man die erste Spitze des Instruments in B setzen, u. s. f. Sollte die Länge LM grösser seyn, als der ganze Maaßstab ist; so müßte man die gegebene Anzahl Ruthen mit der Anzahl Ruthen, die der Maaßstab fasset, dividiren, alsdann den ganzen Maaßstab zwischen den Spitzen des Circul-Instruments fassen, und denselben auf LM nacheinander so oft auftragen, als der gefundene Quotient anzeigt, soweit er eine ganze Zahl ist, und überdem noch ein Stück von so vielen Ruthen, als der übriggebliebene Rest angiebt.

267 §.

Das Maaß eines Winkels muß ein Winkel seyn, dessen Grösse ein für allemal als bekannt angenommen werden kann. Zu dieser Absicht ist der rechte Winkel am geschicktesten (21 §): deswegen kann man entweder den rechten Winkel selbst, oder einen aliquoten Theil desselben bey Ausmessung der übrigen Winkel für das Maaß annehmen. Man hat aus dieser Ursache denjenigen Theilen des rechten Winkels, die man als Maaße der übrigen Winkel gebraucht, ihre eigenen Nahmen gegeben. Der 90ste Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad, der 60-

ste

ste Theil eines Grades eine Minute, der 60ste Theil einer Minute eine Secunde, der 60ste Theil einer Secunde eine Tertie, u. s. f. Damit es nicht nöthig seyn möge, diese Wörter: Grade, Minuten, u. s. f. so oft hinzuschreiben, wenn in weitläuftigen Rechnungen solche Zahlen vorkommen, welche Winkel ausdrücken; hat man folgende Zeichen dafür festgesetzet, die man rechter Hand der Zahlen oberwärts hinschreibt. Das Zeichen (°) bedeutet Grade, (′) Minuten, (″) Secunden, (‴) Tertien, (⁗) oder (IV) Quarten, u. s. f. Also lieſt man den Ausdruck: 53° 27′ 18″ 35‴ so: 53 Grade, 27 Minuten, 18 Secunden, 35 Tertien.

Eben diese Zeichen werden auch wohl gebraucht, die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien, Scrupel beym Längen-Maaße anzudeuten, vornemlich beym Duodecimal-Maaße. Denn würden die Zahlen 98° 7′ 9″ 5‴ 3^{IV} so zu lesen seyn: 98 Ruthen, 7 Fuß, 9 Zoll, 5 Linien, 3 Scrupel. Man weiß es allemahl, ob die vorkommenden Zahlen die Grösse von Linien, oder Winkeln ausdrücken: daher ist davon eben keine Verwirrung zu besorgen, daß hier einerley Zeichen verschiedene Bedeutungen haben. Ueberdem ist es beym Decimal-Maaß fast gar nicht nöthig, diese Zeichen zu gebrauchen, indem man nun z. E. die vorigen Zahlen bequemer so schreibt: 98,7953 Ruthen.

268 §.

Bey dieser Art die Winkel zu messen kömmt es also zuförderst darauf an, den rechten Winkel in seine Grade, Minuten, u. s. f. einzutheilen: und dies ist bewerkstelliget, wenn man einen zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Quadranten in eben so viele gleiche Theile eingetheilt (118 §). Einen auf dem Papier gezeich-

gezeichneten Winkel BAC, oder EAC könnte man also auf diese Art messen. 128 F.

Aus der Spitze A desselben richte man über dem einen Schenkel die senkrechte Linie AD auf, und beschreibe aus dem Mittelpunct A mit einem willkührlichen Halbmesser zwischen den Schenkeln des rechten Winkels DAC den Bogen FG: dieser wird ein Quadrant von seiner Peripherie seyn (116 §), und eben dieser Bogen FG müßte nun in 90 gleiche Theile getheilet werden. Aber in der Elementar-Geometrie hat man keine Regeln, nach welchen sich diese Theilung vollständig bewerkstelligen liesse: deswegen muß man mit der Theorie hier Versuche verbinden, und sich übrigens des Circul-Instruments bey der Theilung bedienen.

Weil der Quadrant FG 90 Theile haben soll: so bekömmt die ganze Peripherie 4 × 90, oder 360 solcher Theile. Nun schneidet der Halbmesser AF = FH, $\frac{1}{6}$ der Peripherie, also 60 solcher Theile ab, und es bleiben für HG 30 solcher Theile. Man kann also HL = HG nehmen: so kommt bey L der 30ste, bey H der 60ste, und bey G der 90ste Theilungs-Punct. Nun muß man durch Versuche einen dieser Bogen FL in 3 gleiche Theile eintheilen: so erhält man die Eintheilung von 10 zu 10 Theilen, die man denn auch auf LH, HG aufträgt. Der Bogen F 10 halbirt, behält nun 5 Theile, und der Bogen F 5 in 5 gleiche Theile durch Versuche getheilt, giebt die einzelnen Theile, wie F 1: also wäre der Winkel FA 1 = 1 Grad. Alle übrige Bogen muß man nun eben so theilen, und Acht geben, ob AB durch einen Theilungspunct durchgehet, da denn die darneben stehende Zahl, die Anzahl der Grade angiebt, die der Winkel

BAC

BAC hält, welches in der 125 Fig. 50 Grade seyn würden. Gienge AB zwischen zweenen Theilungspuncten durch; so müste man die halben und viertel Grade nach dem Augenmaaße schätzen.

Wenn der gegebene Winkel stumpfist, wie EAC; so muß man den Quadranten FG durch G fortführen, bis er EA erreicht, und die Abtheilungen des Quadranten über G hinaus tragen, da man denn eben so wie vorhin findet, wie viele Grade der Winkel EAC halte, welches in der Zeichnung 120 Grade seyn würden.

269 §.

Man siehet leicht, daß es hier nicht nöthig sey, die Linien von A nach den Theilungspuncten, wie F 1 eine ist, alle zu ziehen, und auf die Art den rechten Winkel selbst zu theilen. Wenn man nur weiß, wie viele Abtheilungen des Quadranten zwischen den Schenkeln des Winkels fallen; so weiß man auch, wie viele Grade er hält. Es ist eben so beschaffen mit den kleinern Abtheilungen der Grade in Minuten, Secunden, u. s. f., wenn man den Halbmesser AF groß genug nimmt. Deswegen giebt man diesen Theilen des Bogens eben die Nahmen, die man den dazu gehörigen Theilen des rechten Winkels giebt. Der 90ste Theil des Quadranten heißt ein Grad der Peripherie: also gehen auf die halbe Peripherie 180, und auf die ganze Peripherie 360 solcher Grade. Jeder von diesen Graden wird in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden getheilt, u. s. f. fort. Die Anzahl der Grade, Minuten, Secunden, u. s. f. eines Kreisbogens drückt also sein Verhältniß zum Quadranten zur halben und ganzen Peripherie aus, so wie eben diese Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f.

das

das Verhältniß, des zu dem Bogen gehörigen Winkels am Mittelpunct zu einem rechten, zu zweenen, oder vier rechten Winkeln ausdrückt (224 §).

Kreisbogen, die zu verschiedenen Halbmessern gehören, aber eine gleiche Anzahl von Graden, und Theilen solcher Grade halten, sind ähnliche Kreisbogen, und gehören zu einerley Winkel (227 §).

270 §.

Diese Art, einen auf dem Papier gezeichneten Winkel vermittelst jedesmahliger Theilung des Bogens zu messen, würde in der Ausübung sehr weitläuftig und beschwerlich seyn: aber dieser Unbequemlichkeit hilft das Instrument ab, welches unter dem Nahmen des Winkelmessers, oder Transporteurs bekannt ist. Man braucht nemlich nur einen, ein für allemahl in seine 180 Grade, und wenn es angehet, auch Minuten, u. s. f. eingetheilten Halbkreis, der so eingerichtet ist, daß man seinen Mittelpunct an der Spitze des zu messenden Winkels, und zugleich seinen ersten Theilungspunct an dem einen Schenkel anlegen kann. Denn nun ist nichts weiter nöthig, als daß man nur die Grade, Minuten, u. s. f. des Bogens zähle, der zwischen den Schenkeln des Winkels fällt. Hierauf gründet sich folgende Einrichtung des Transporteurs, den die 129 F. nach seiner Haupteinrichtung vorstellet. 129 F.

Auf dem graden Lineal DEGF stehet der eingetheilte Halbkreis DHE so, daß sein Mittelpunct A in der Schärfe DE des Lineals fällt, und diese Schärfe DE selbst sein Durchmesser ist, weswegen dieser Punct A darin besonders bezeichnet seyn muß. Die Grade sind gewöhnlich auf zweyerley Art von D durch H nach E, und zugleich rückwärts von E durch H

nach

nach D gezählt so, daß der Anfang und das Ende der Eintheilung in den Durchmesser DE fällt, und man hat davon den Vortheil, daß der Transporteur allemahl das Maaß zweyer Nebenwinkel auf einer graden Linie zugleich angiebt. Daraus ergiebt sich nun leicht die Auflösung der folgenden beyden Aufgaben.

271 §.

129 F. Einen gradlinichten Winkel *BAC*, der auf dem Papier gezeichnet ist, vermittelst des Transporteurs zu messen.

Aufl.. Man lege den Transporteur so auf den Winkel, daß sein Mittelpunct auf der Spitze A des Winkels fällt, und die Schärfe des Lineals DE an dem einen Schenkel AC genau anliegt. Man zähle nun die Grade auf dem Bogen, der zwischen diesem, und dem andern Schenkel AB des Winkels fällt, und zwar so, daß man in AC zu zählen anfängt: so weiß man, wie viele Grade der Winkel BAC halte. In der Zeichnung sind es 50 Grade. Die dabey stehende zwote Zahl 130 zeigt, daß der Nebenwinkel 130° halte.

272 §.

An einer gegebenen Linie *AC* und einem Punct *A* derselben vermittelst des Transporteurs einen Winkel zu setzen, der eine gegebene Anzahl von Graden, Minuten, u. s. f. hält.

Aufl. Man lege den Transporteur an AC so an, daß der Mittelpunct auf A fällt, und die Schärfe des Lineals DE an AC anliegt: man zähle nun von AC angerechnet die gegebene Anzahl von Graden fort, und wenn überdem noch Minuten, u. s. f. gegeben sind, so schätze man das übrige nach dem Augenmaaß. Man mache hiernächst an dem Umfang des

Trans-

Transporteurs bey dem letzten Grade, z. E. bey dem 50sten, wenn der Winkel 50 Grade halten soll, einen Punct K, oder rücke K nach dem Augenmaaß noch um $\frac{1}{3}$tel $\frac{1}{6}$tel u. s. f. eines Grades weiter, wenn etwa noch 20 oder 10 Minuten, u. s. f. mehr gegeben wären. Durch A und K ziehe man AB: so ist BAC der verlangte Winkel.

Von diesem Gebrauch hat das Instrument den Nahmen Transporteur, indem man vermittelst desselben auf dem Papier einen Winkel von gegebener Grösse, wohin man will, zeichnen, und von einem Ort zum andern tragen kann.

273 §.

Einen Kreis vermittelst des Transporteurs in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man dividire 360° durch die gegebene Anzahl der gleichen Theile, die man sucht: so drückt der Quotient die Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. aus, welche jeder gesuchte Theil des Kreises fasset.

Ist nun in dem Umfange des Kreises ein Punct A gegeben, oder willkührlich angenommen, wo die Theilung ihren Anfang nehmen soll: so ziehe man für diesen Punct den Halbmesser AC, und setze an demselben bey C einen Winkel ACB, der die gefundene Anzahl Grade hält (272 §): so wird BC den gesuchten aliquoten Theil AB der Peripherie abschneiden, und man wird die Sehne dieses Bogens so oft, als verlangt ward, in der Peripherie herumtragen, und hiedurch die Theilung bewerkstelligen können. 130 F.

Dieses Verfahren dienet also in der Ausübung, wenn man in oder um den Kreis ein reguläres Polygon beschreiben soll, das eine verlangte Anzahl

Seiten hat (138. 144 §). So würde man für das reguläre Fünfeck den Winkel ACB = 72° nehmen müssen.

274 §.

Wendet man diese Art, die Winkel auszumessen auf die Lehre von den Dreyecken an: so kommt man leicht von selbst auf folgende Sätze. Alle drey Winkel eines Dreyecks zusammen betragen 180° (72 §).

132 F. Weiß man also die Grösse eines Winkels BAD in Graden, und man subtrahirt diese Anzahl von 180°: so weiß man, wie viel die beyden übrigen B + D zusammen betragen. Es sey A = 65° 18′ 34″: so giebt die Rechnung.

A + B + D = 180° 0′ 0″
A = 65° 18′ 34″

also B + D = 114° 41′ 26″.

Weiß man die Grösse zweener Winkel A und B und man subtrahirt ihre Summe von 180°; so hat man den dritten Winkel. Es sey z. E.

A = 65° 18′ 34″
B = 53° 25′ 36″

so ist A + B = 118° 44′ 10″

Dies subtrahirt

von 180° 0′ 0″

giebt D = 61° 15′ 50″.

Weil im gleichseitigen Dreyeck alle drey Winkel gleich groß sind (55 §); so beträgt jeder Winkel $\frac{1}{3}$ von 180°, oder jeder Winkel eines gleichseitigen Dreyecks ist 60° groß.

275 §.

Es lassen sich also für ein reguläres Polygon, wenn die Anzahl der Seiten gegeben ist, auch leicht die Centri-

Centri- und Polygon-Winkel berechnen. Denn Centriwinkel hat man, wenn 360° mit der Anzahl der Seiten dividirt werden; und der Centri-Winkel von 180° subtrahirt, giebt den Polygon-Winkel. So

wird für das	der Centri-W.	der Polygon-W.
Dreyeck	120° 0′ 0″	60° 0′ 0″
Viereck	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″
Fünfeck	72° 0′ 0″	108° 0′ 0″
Sechseck	60° 0′ 0″	120° 0′ 0″
Siebeneck	51° 25′ 42$\frac{6}{7}$″	128° 34′ 17$\frac{1}{7}$″
Achteck	45° 0′ 0″	135° 0′ 0″
Neuneck	40° 0′ 0″	140° 0′ 0″
Zehneck	36° 0′ 0″	144° 0′ 0″

Also läßt sich auch die Aufgabe des 141 §. durch Hülfe des Transporteurs auflösen. Wenn nemlich über AB ein reguläres Polygon, z. E. ein Fünfeck gesetzt werden soll; so setzt man bey A und B nach dem 272 §. den berechneten halben Polygon-Winkel an, der für das Fünfeck 72° groß ist. Auf die Art findet man den Mittelpunct C des Kreises, darinn sich AB fünfmahl herumtragen läßt. 130 F.

Der XI. Abschnitt.

Von der Ausmessung ebener Figuren.

276 §.

Den Flächen Inhalt eines Parallelogramms *P* auszurechnen, wenn die Grundlinie, und Höhe desselben gegeben sind. 131 F.

Aufl. Man muß eine andre ebene Figur, deren Grösse als bekannt vorausgesetzt werden kann, für

das Maaß annehmen (259 §.), und untersuchen, wievielmahl diese entweder selbst, oder ein aliquoter Theil von ihr, in dem Parallelogramm enthalten sey. In solcher Absicht erwählt man ein Quadrat Q, dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 260 §. erwehnten Maaßen, z. E. ein Fuß, eine Ruthe u. s. f. Ein solches Quadrat erhält den Nahmen von diesem Längenmaaße, dem die Seite desselben gleich ist. Es heißt eine Quadrat-Ruthe, ein Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Zoll u. s. f., nachdem L eine Ruthe einen Fuß, einen Zoll lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundlinie AB, nebst der Höhe CE in Zahlen gegeben sind, wobey L die Einheit ist; so hat man aus dem 248 §. die Proportion $Q:P = L \times L : AB \times CE = 1 : AB \times CE$, weil $L = 1$ ist. Demnach ist das Quadrat Q im Parallelogramm P so vielmahl enthalten, als Eins in dem Product aus der Grundlinie AB in die Höhe CE enthalten ist, und der Flächen-Inhalt des Parallelogramms wird gefunden, wenn man dies Product sucht.

Es sey AB = 39, 36 R.
CE = 54, 78 R.

31488
27552
15744
19680

so wird P = 2156, 1408 Q. R.

277 §.

Die Quadrate selbst gehören in die Classe der Parallelogramme, und die Grundlinie eines Quadrats ist seiner Höhe gleich. Wenn man also die nach einem bekannten Maaß gemessene Seite eines Quadrats

drats mit sich selbst multiplicirt; so drückt das Product aus, wie vielmahl ein Quadrat, dessen Seite = 1 ist, in jenem enthalten sey, und dies ist der Ursprung des Nahmens einer Quadratzahl (180 §. R.) Eine Quadratruthe enthält demnach 100 Q. Fuß, weil ihre Seite nach der Decimal-Abtheilung = 10 Fuß ist. Aus eben der Ursache enthält ein Quadrat-Fuß 100 Quadrat-Zoll, ein Quadrat-Zoll 100 Quadratlinien, eine Quadratlinie 100 Quadrat-Scrupel.

Dieser Umstand ist deswegen besonders anzumerken, weil er dazu dienet, den Decimal-Theilen ihre gehörige Bedeutung zu geben, die an einer ganzen Zahl anhängen, welche den Flächen-Inhalt einer Figur ausdrückt, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe, oder Quadrat-Fuß u. s. f. ist. So fand man im vorig. §. das Parallelogramm $P = 2156$, 1408 Q. R oder $P = 2156\frac{1408}{10000}$ Q. R. Man bringe den anhängenden Bruch auf Quadrat-Fuß, nach dem 146 §. R. so hat man $\frac{1408}{10000}$ Q. R. = $\frac{1408}{10000}$ 100 Q. F. = 14,08 Q. F. Eben so werden $\frac{8}{100}$ Q. F. = 8 Quad. Zolle und deswegen sind 2156,1408 Q. R. so viel, als 2156 Q. R. 14 Q. F. 8 Q. Z.

Man kann sich auf solche Art jedesmahl die an einer Zahl von dieser Art anhängende Decimalzahl von der Linken gegen die Rechte so eingetheilt vorstellen, daß jede Classe zwo Ziffern bekommt, und es werden diese Classen Quadratfüsse, Quadratzolle, Quadratlinien, u. s. f. nacheinander bedeuten, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe ist. Wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Quadratfuß, oder Quadratzoll, u. s. f. ist, fällt leicht in die Augen. Wäre die Anzahl der Decimalstellen ungrade; so erhält

man durch Hinzusetzung der 0 eine grade Anzahl, welches den Werth der Zahl bekanntermassen nicht ändert. So sind 453,73269 Q. R. = 453 Q. R. 73 Q. F. 26 Q. Z. 90 Q. L. Denn 0,73269 Q. R. = 0,73269 × 100 Q. F. = 73,269 Q. F., und 0,269 Q. F. = 0,269 × 100 Q. Z. = 26,9 Q. Z., aber 0,9 Q. Z. = 0,9 × 100 Q. L. = 90 Q. L.

288 §.

Nach dem Duodecimalmaaß enthält eine Quadratruthe 144 Quadratfuß, ein Quadratfuß enthält 144 Quadratzoll, ein Quadratzoll 144 Quadratlinien, u. s. f. Dies vorausgesetzt, kann man leicht das Decimal-Quadratmaaß auf Duodecimal-Quadratmaaß, und umgekehrt, dieses auf jenes bringen. Es dienen dazu folgende Sätze, als Folgen des vorigen.

Eine Decimal-Quadratruthe hat 100 Quadratfuß, 10000 Quadratzoll, 1000000 Quadratlinien u. s. f.

Ein Decimal-Quadratfuß hat 100 Quadratzoll, 10000 Quadratlinien, 1000000 Quadratscrupel, u. s. f.

Ein Decimal-Quadratzoll hat 100 Quadratlinien, 10000 Quadratscrupel, u. s. f.

Eine Duodecimal-Quadratruthe hat 144 Quadratfuß, 20736 Quadratzoll, 2985984 Quadratlinien, u. s. f.

Ein Duodecimal-Quadratfuß hat 144 Quadratzoll, 20736 Quadratlinien, 2985984 Quadratscrupel, u. s. f.

Ein Duodecimal-Quadratzoll hat 144 Quadratlinien, 20736 Quadratscrupel, u. s. f.

Frägt man nun: 63 Q. F. 95 Q. Z. Decimalmaaß, wie viel sind es Q. F. und Q. Z. nach der Duodecimal-Eintheilung? vorausgesetzt, daß die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley sey: so setzt man an

100 Dec. Q. f. — 144 Duod. Q. f. — 63 Q. f. 95 Q. z. Decm?

× 100 × 100

10000 Dec. Q. z. 6395 Dec. Q. z.

und das Facit ist $= \frac{6395}{10000} \times 144$ Duod. Quad. F. $= 92{,}0880$ Duod. Quad. F. Man erhält ferner auf eben die Art $0{,}0880$ Duod. Quad. F. $= 0{,}088 \times 144$ Duod. Q. Z. $= 12{,}672$ Duod. Q. Z., und $0{,}672$ Duod. Q. Z. $= 0{,}672 \times 144$ Duod. Q. L. $= 96{,}768$ Duod. Q. L. Demnach sind 63 Q. F. 95 Q. Z. Decimalmaaß soviel, als 92 Q. F. 12 Q. Z. 96,768 Q. L. Duod. Maaß, wenn nemlich die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley ist.

279 §.

Den Flächen-Inhalt eines Dreyecks *ABC* 131 auszurechnen, wenn eine Seite desselben *AB* F. nebst der dazu gehörigen Höhe *CE* nach einem bekannten Maaß in Zahlen gegeben sind.

Aufl. Wenn auf eben der Grundlinie AB, in eben der Höhe CE, ein Parallelogramm P stehet; so ist das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2}$ P. Da nun P $=$ AB $\times$ CE: so wird ABC $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ CE. Demnach giebt das halbe Product aus der Grundlinie eines Dreyecks in seine Höhe den Flächen-Inhalt des Dreyecks im Quadratmaaß.

Wenn also AB $= 39{,}36$ R., CE $= 54{,}78$ R: so wird das Dreyeck ABC $= 1078{,}0704$ Quad. R. oder 1078 Q. R. 7 Q. F. 4 Q. Z.

280 §.

I 3 2 F. Ein Trapezium *ABCD* auszurechnen, wenn beyde parallele Seiten, *AB*, *CD*, nebst ihrer Entfernung, oder der Höhe des Trapezii *DE*, gegeben sind.

Aufl. Die halbe Summe der parallelen Seiten $\frac{1}{2}$ (AB + CD) multiplicire man in die Höhe DE: so drückt das Product den Inhalt des Trapezii aus.

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD: so ist das Dreyeck ABD $= \frac{1}{2}$ AB . DE, und das Dreyeck CBD $= \frac{1}{2}$ CD . DE (279 §.): also ABCD = ABD + CBD $= \frac{1}{2}$ AB . DE + $\frac{1}{2}$ CD . DE $= \frac{1}{2}$ (AB + CD) DE.

281 §.

Den Inhalt eines regulären Polygons auszurechnen, wenn nicht allein die Länge einer Seite, sondern auch der kleinste Halbmesser gegeben ist.

Aufl. Wenn man die Zahl, welche die Länge der Seite ausdrückt, mit der Anzahl der Seiten multiplicirt; so hat man den ganzen Umfang des Polygons, und das halbe Product aus diesem Umfang in den kleinsten Halbmesser, giebt den Flächen-Inhalt desselben. Denn es giebt den Inhalt eines dem Polygon gleichen Dreyecks (143 §.).

282 §.

Eine jede andre gradlinichte Figur auszurechnen, wenn man alle ihre Diagonallinien, und die diesen Diagonallinien zugehörigen Höhen der Dreyecke messen kann, in welche die Figur durch selbige vertheilt wird.

Aufl. Man berechne den Inhalt eines jeden dieser Dreyecke besonders nach dem 279 §., und bringe

zuletzt alle gefundene Zahlen in eine Summe: so hat man den Inhalt der ganzen Figur.

Im Viereck ABCD ist eine Diagonale AC hin- 133
länglich: wenn man diese für die gemeinschaftliche F.
Grundlinie der beyden Dreyecke ABC, ADC nimmt, so, daß BF, DE die Höhen werden; so ist das ganze Viereck $= \frac{1}{2}$ AC. BF $+ \frac{1}{2}$ AC. DE $= \frac{1}{2}$ AC (BF + DE). Diesen Schlüssen gemäß findet man den Inhalt auf einmal durch eine einzige Multiplication, welches die Rechnung verkürzt.

In jeder andern Figur, die mehr als vier Seiten hat, machen zwey Dreyecke, die an einer Diagonallinie liegen, ein solches Viereck aus. Daher kann man zu Verkürzung dieser Rechnung alle solche Vierecke auf die jetzt beschriebene Art berechnen, und zuletzt alles mit den etwa noch übrigen Dreyecken in eine Summe bringen.

283 §.

Wenn die Länge zwoer Seiten eines bey *D* rechtwinklichten Dreyecks *BDC* gegeben ist, die Länge der dritten Seite zu berechnen, vorausgesetzt, daß man aus einer jeden Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen könne.

Aufl. 1. Sind beyde Catheti BD, CD gegeben; so mache man von jedem Catheto die Quadrat-Zahl, diese addire man zusammen, und ziehe aus der Summe die Quadrat-Wurzel: so hat man die Hypothenuse BC.

2. Ist nebst der Hypothenuse BC ein Catheti- 130
BD gegeben; so ziehe man die Quadratzahl des ge- F.
gebenen Catheti von der Quadratzahl der Hypothenuse ab, und suche aus dem Rest die Quadrat-Wurzel: so hat man die Länge des andern Catheti.

Beweis. Es ist $BCq = BDq + CDq$ (111 §): also $BC \times BC = BD \times BD + CD \times CD$ (277 §), und $BC = \sqrt{(BD \times BD + CD \times CD)}$ (183 §. R.). Es ist ferner $CDq = BCq - BDq$ (111 §), oder $CD \times CD = BC \times BC - BD \times BD$ (277 §): also $CD = \sqrt{(BC \times BC - BD \times BD)}$.

Wäre $BD = CD = 1$; so wäre $PC = \sqrt{2}$: also sind in diesem Fall BC und BD incommensurable Linien.

284 §.

130 F. Die Länge der Seite *AB* eines regulären Polygons ist nebst dem grösten Halbmesser *BC* gegeben: man soll den kleinsten Halbmesser *CD*, und hiernächst die Seite *EB* eines in eben dem Kreise beschriebenen regulären Polygons, das doppelt so viele Seiten hat, durch Rechnung finden.

Aufl. Weil der Bogen $AE = EB$; so ist der Halbmesser CE auf der Sehne AB senkrecht, und $BD = \frac{1}{2} AB$: deswegen erhält man nach dem vorigen § $CD = \sqrt{(BCq - BDq)}$. Ferner wird $ED = CE - CD$, also wiederum nach dem vorigen 283 § $BE = \sqrt{(EDq + BDq)}$.

1. Diese Aufgabe dient nicht allein, den Inhalt des regulären Polygons zu finden (281 §), sondern auch die Seiten FG des ähnlichen regulären Polygons um denjenigen Kreis, der mit dem grösten Halbmesser BC des vorigen durch alle Winkelpuncte desselben beschrieben werden kann. Es ist nemlich $CD : CE$, oder $CD : CB = AB : FG$.

2. Man setze in der 110 Fig. den Halbmesser CA des Kreises $= 1$, so ist die Peripherie des innern regulären Sechsecks $= 6$, und der kleinste Halbmesser $= \sqrt{}$

$= \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (185 §. Rech.). Ferner ist $\sqrt{3} = 1{,}7320507$, wovon man sich hier durch die Probe überzeugen kann, weil diese Zahl mit sich selbst multiplicirt sehr nahe die Zahl 3 herstellt. Demnach ist der kleinste Halbmesser des innern Sechsecks $= 0{,}86602535$, und die Proportion $0{,}86602535 : 1 = 6$: viert. Zahl giebt die Peripherie des äussern Sechseck $= 6{,}9282038$. Diese ist demnach noch nicht völlig 7 mahl länger, als der Halbmesser, und es ist jede Seite, wie $EF = 1{,}1547006$, also $\frac{1}{2}$ EF $=$ BE $= 0{,}5773503$. Daraus, und aus dem Halbmesser $CB = 1$ könnte man dem 283 § gemäß den grösten Halbmesser CE suchen.

3. Es verhält sich aber allemahl der kleinste Halbmesser des innern Polygons zum Halbmesser des Kreises, (der mit dem grösten Halbmesser des innern Polygons einerley ist), wie eben dieser Halbmesser des Kreises zum grösten Halbmesser des ähnlichen äussern Polygons: also hat man auch im obigen Exempel $0{,}86602535 : 1 = 1$: viert. Zahl, und diese giebt den grösten Halbmesser des äussern Sechsecks $= 1{,}1547$o.

4. Wenn der Halbmesser des Kreises $= 1$ gesetzt ist; so ist die Zahl, welche die Länge des grösten Halbmessers eines äussern regulären Polygons angiebt, einerley mit derjenigen, welche angiebt, wievielmahl die Peripherie des ähnlichen innern Polygons in der Peripherie des äussern enthalten sey: also ist eben diese Zahl zugleich der Exponent des Verhältnisses der Peripherie des äussern zur Peripherie des ähnlichen innern Polygons.

285 §.

285 §.

Die Länge der Peripherie des Kreises für den Halbmesser = 1 so genau zu finden, da der Fehler kleiner ist, als ein gegebener Bruch so klein man will.

Aufl. Es sey der Halbmesser des Kreises $= r$, und n eine sehr grosse Zahl, also $\frac{r}{n}$ ein sehr kleiner Theil des Halbmessers. Ferner sey L eine Linie, die grösser als die Peripherie des Kreises ist, so ist auch $\frac{r}{nL}$ ein sehr kleiner Bruch, und $1 + \frac{r}{nL}$ eine Zahl, welche sehr wenig grösser als 1 ist. Es sey ferner im Kreise ein reguläres Polygon beschrieben, dessen Peripherie $= p$, und ein ähnliches Polygon um den Kreis, dessen Peripherie $= P$ ist; die Anzahl der Seiten dieser Polygone aber sey so groß, daß der Exponent des Verhältnisses der äussern Peripherie zur innern, also die Zahl $\frac{P}{p} = 1 + \frac{r}{nL}$ ausfalle.

Weil nun $P > p$ ist, so sey $P = p + d$, also d die Differenz der Peripherien beyder Polygone: alsdenn ist $\frac{p+d}{p}$, oder $1 + \frac{D}{p} < 1 + \frac{r}{nL}$, mithin $\frac{d}{p} < \frac{r}{nL}$, und $d < \frac{r}{nL} \cdot p$, oder $d < \frac{p}{L} \cdot \frac{r}{n}$. Der Voraussetzung gemäß ist l grösser als die Peripherie des Kreises, also auch grösser als p, und

und $\frac{p}{L}$ ist ein ächter Bruch, also $\frac{p}{L} \cdot \frac{r}{n} < \frac{r}{n}$,

mithin auch $d < \frac{r}{n}$.

Eine Linie, die 7 mahl grösser als der Halbmesser ist, übertrift schon die Peripherie des Kreises (284 §. n. 2). Wenn also $r = 1$ und $L = 7$ gesetzt wird, so wird erfordert, daß $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$ sey, wenn $d < \frac{1}{n}$ ausfallen soll. Weil nun bey der Voraussetzung $r = 1$ auch $\frac{P}{p}$ dem grösten Halbmesser des äussern Polygons gleich ist; so führen diese Schlüsse auf die folgende Auflösung der vorgelegten Aufgabe.

Anstatt der Peripherie des Kreises selbst suche man die Peripherie eines innern regulären Polygons, welche von der Peripherie des ähnlichen äussern Polygons um eine Differenz verschieden ist, die kleiner ausfällt, als der vorgeschriebene Bruch: alsdenn ist um so mehr auch die Differenz der Peripherie des Kreises von der Peripherie des innern Polygons kleiner als der vorgeschriebene Bruch, und die Zahl, welche die Länge der innern Peripherie ausdrückt ist mit der Zahl einerley, welche die Peripherie des Kreises ausdrückt, bis auf eine Differenz, die kleiner als der vorgeschriebene Bruch ist.

Soll diese Differenz kleiner seyn, als $\frac{1}{10000000}$, so muß der grösste Halbmesser des äussern Polygons kleiner seyn als $1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10000000}$, also kleiner als 1,00000142857. Die Peripherie des Kreises sey = Π, so muß man die Sehnen folgender Bogen suchen:

Zahl

	Zahl ihrer Grade	
$\frac{1}{6}$ Π	60°	
$\frac{1}{12}$ Π	30°	
$\frac{1}{24}$ Π	15°	
$\frac{1}{48}$ Π	7°	30′
$\frac{1}{96}$ Π	3°	45′
$\frac{1}{192}$ Π	1°	$52\frac{1}{2}$′
$\frac{1}{384}$ Π	0°	$56\frac{1}{4}$′
$\frac{1}{768}$ Π	0°	$28\frac{1}{8}$′

Die Sehne des letzten Bogens von $28\frac{1}{8}$′, also die Seite des innern regulären Polygons von 768 Seiten findet man = 0,0081812, den kleinsten Halbmesser dieses innern Polygons = 0,999916, also den grösten Halbmesser des ähnlichen äussern Polygons = $0,999916\frac{1}{6}$ = 1,0000084. Weil diese Zahl kleiner ist, als die vorhin bemerkte 1,00000142; so ist man versichert, daß der Fehler nicht $\frac{1}{10000}$ betrage, wenn man die Peripherie des innern regulären Polygons von 768 Seiten für die Peripherie des Kreises selbst annimmt. Es war aber

die Polygonseite = 0,0081812
die multiplicirt mit 768

00654496
490872
572684

giebt die Peripherie 6,2831616

Demnach ist für den Halbmesser = 1
die Peripherie des Kreises = 6,28316 ....
die halbe Peripherie = 3,14158 ....

Setzt man diese Rechnung weiter fort, so findet man für den Halbmesser 1 die halbe Peripherie, oder welches

ches einerley ist, für den Durchmesser 1 die ganze Peripherie=

3,141592 653589 793238 462643 383879 50

Die ersten 7 Decimalstellen von dieser Zahl, welche Ludolph von Cölln bis auf die 32ste Decimalstelle berechnet hat, sind in den meisten Fällen hinlänglich genau: setzt man also den Durchmesser des Kreises $= d$, seine Peripherie $= p$, so hat man $d : p = 1 : 3{,}1415926$, und dies Verhältniß ist sehr nahe= dem Verhältnisse 113 : 355, welches Metius angegeben hat. Archimedes hat schon für das Verhältniß $p : d$ die Gränzen 22 : 7 und $21\frac{7}{71} : 7$, oder $3\frac{1}{7} : 1$, und $3\frac{10}{71} : 1$ angegeben.

Man setze ein für allemahl die Zahl $\frac{p}{d} = \pi$; so ist π der Exponent des Verhältnisses der Peripherie eines jeden Kreises zu dem dazu gehörigen Durchmesser. Uebrigens behalte man sich vor, nachdem mehr oder weniger Schärfe bey der Rechnung nöthig ist, auch mehr oder weniger Decimaltheile der Zahl π in Rechnung zu bringen: so kann man sehr leicht alle bey der Kreismessung vorkommende Aufgaben auflösen. Nimmt man $\pi = 3{,}1416$ an, so ist das zwar etwas zu viel, allein der Fehler beträgt viel weniger, als $\frac{1}{10000}$ des Halbmessers. Setzt man den Halbmesser $= r$, so ist $d = 2r$, und man hat $p = \pi d$, oder $p = 2\pi r$.

286 §.

Wenn der Durchmesser d eines Kreises gegeben ist, nicht allein seinen Umfang p, sondern auch die Länge a eines jeden in Graden ausgedruckten Bogens von diesem Kreise zu berechnen.

Aufl. Es ist $p = \pi d$ (285 §), und wenn man die Länge eines in Graden gegebenen Bogens sucht, so schließt man weiter: wie 360° zur gegebenen Anzahl Grade, so die gefundene Länge des Umfangs zur Länge des Bogens. Wenn also der Durchmesser 73 Fuß ist, und man sucht nicht allein die Länge p des Umfangs, sondern auch die Länge a eines Bogens von 63° 17′; so giebt die Rechnung folgende Zahlen:

$\pi = 3{,}1416$
$d = \quad 73$

94248
219912

also $p = 229{,}3368$ Fuß

Ferner setzt man an

360° : 63° 17′ = 229,3368 : ges. Länge d. Bog.
× 60 × 60

21600′ : 3797′ = 229,3368 : ges. Länge d. Bog.

so giebt die Regel Detri $a = 40{,}314$ Fuß.

287 §.

Wenn die Länge des Umfangs gegeben ist, den Durchmesser zu finden: und wenn nebst dem Umfange auch die Länge eines Bogens gegeben ist, die Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. dieses Bogens zu finden.

Aufl. Es ist $p = \pi d$, also umgekehrt $d = \frac{1}{\pi} p$, und man findet die Zahl

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ 886183\ 790671.$$

In

In den meisten Fällen ist es genau genug, wenn $\frac{1}{\pi} = 0{,}318310$ angenommen wird. Wäre nun $p = 236$ Fuß, so giebt die Rechnung

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318310$$
$$p = 236$$
$$190986$$
$$95493$$
$$63662$$

also $d = 75{,}12116$ Fuß.

Verlangt man die Anzahl der Grade eines Bogens von 112 Fuß, wenn der ganze Umfang 236 F. lang ist, so schließt man 236 F.: 112 F. = 360°: ges. Zahl: diese wird $= \frac{112 \times 360}{236} = 170° 51'$.

288 §.

Ein Kreisbogen der eben so lang ist, als sein Halbmesser, hat in allen Kreisen einerley Anzahl von Graden, Minuten und Secunden.

Beweis. Ein Kreisbogen A gehöre zum Halbmesser R, und zur Peripherie P, ein andrer a zum Halbmesser r, und zur Peripherie p: so ist vermöge des 223 §. $P:p = R:r$. Wenn demnach $A = R$, und $a = r$; so ist auch $P:p = A:a$, oder $P:A = p:a$ (182 §.). Ist also $A = \frac{n}{360} P$: so ist auch $1 : \frac{n}{360} = p:a$, und $a = \frac{n}{360} p$.

Zu einem solchen Bogen gehört also in allen Kreisen einerley Winkel am Mittelpunct.

289 §.

Die Anzahl der Grade eines Kreisbogens zu finden, der seinem Halbmesser gleich ist.

Aufl. Wenn die Länge des Bogens $= a$ ist, und n die Zahl seiner Grade, so hat man

$$p : a = 360° : n°,$$

oder $$2\pi r : a = 360° : n°.$$

Im gegenwärtigen Fall ist $a = r$, also

$$2\pi : 1 = 360° : n°,$$

oder $$\pi : 1 = 180° : n°,$$

also findet man die Zahl $n = \frac{1}{\pi} . 180 = 57{,}2958$ beynahe $= 57{,}3$.

Demnach hält ein Kreisbogen, der seinem Durchmesser gleich ist, ziemlich nahe, 114,6 Grade.

290 §.

Wenn die Länge eines Kreisbogens gegeben ist, nebst der Anzahl seiner Grade, den zugehörigen Halbmesser, oder Durchmesser, zu finden.

Aufl. Aus der Proportion $n° : 360° = a : 2\pi r$,

oder $n° : \frac{1}{\pi} . 180° = a : r$, wird r gefunden,

wenn a und n gegeben sind. Es war aber $\frac{1}{\pi} . 180° = 57{,}2958$, also findet man $r = \frac{57{,}2958 . a}{n}$,

oder schärfer $r = \frac{180°}{n°} . \frac{1}{\pi} . a$.

Es

Es sey $a = 96$ Fuß, und $n = 43$, so findet man

$$r = \frac{57{,}2958 \cdot 96}{43} = 127{,}916 \text{ Fuß.}$$

Es sey der Bogen 96 F. lang, und halte 43°. Nun verhalten sich die Längen zweener Kreisbogen wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunct (224 §), und dieserwegen, wie die Menge ihrer Grade. Ueberdem weis man aus dem 289 §., daß der dem Durchmesser gleiche Bogen 114,6°, und der dem Halbmesser gleiche Bogen 57,3° halte. Deswegen schliesse man 43° : 114,6° = 96 F : Länge eines dem Durchmesser gleichen Bogens, oder 43° : 57,3° = 96 F : Länge eines dem Halbmesser gleichen Bogens; so weis man im ersten Fall die Länge des Durchmessers, und im zweyten Fall die Länge des Halbmessers.

So wird im Exempel der Durchmesser $= \frac{114{,}6 \times 96}{43}$

$= 255{,}8$ F. Der Halbmesser $= \frac{57{,}3 \times 96}{43} =$ 127,9 F.

291 §.

Die Fläche eines Kreises auszurechnen, wenn sein Durchmesser d, oder Umfang p gegeben ist.

Aufl. Aus d kann man p, und umgekehrt, aus p wieder d berechnen (286. 287 §.). Hat man beydes; so giebt das Product aus dem vierten Theil des Durchmessers in den Umfang die Grösse der Kreisfläche: denn dies ist der Inhalt eines der Kreisfläche gleichen Dreyecks (150 §.).

Wenn $d = 73$ F.: so ist $p = 229{,}3368$ F. Also die Kreisfläche $= \frac{1}{4} \times 73 \times 229{,}3368 = 4185{,}39$ Q. F.

Man setze die Kreisfläche $= C$, so ist $C = \frac{1}{4} pd$, und $p = \pi d$, also auch $C = \frac{1}{4}\pi dd$. Daraus folgt die Proportion

$$C : dd = \tfrac{1}{4}\pi : 1.$$

Nimmt man $\pi = 3{,}1416$, so hat man $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7854$. Im vorigen Exempel war

$d = 73$ Fuß,

also 73

219

511

also $dd = 5329$ Qu. F.

× 0,7854

21316

26625

42632

37303

und $C = 4185{,}3766$ Qu. F.

Ist $d = 100$: so wird $p = 314$, und die Kreisfläche $= 314 \times 25 = 7850$. Also verhält sich das Quadrat des Durchmessers zur Kreisfläche, wie $10000 : 7850 = 1000 : 785$. Demnach findet man auch die Kreisfläche, wenn man das Quadrat des gegebenen Durchmessers in die Zahl 0,785 multiplicirt. Für $d = 73$ F. wäre also die Kreisfläche $= 5329 \times 0{,}785 = 4183{,}265$ Q. F. wie vorhin.

292 §.

130 Die Fläche eines Kreis-Ausschnitts $AEBC$ F. zu berechnen, wenn die Länge des Bogens AEB, und der zugehörige Halbmesser bekannt ist.

Aufl. Die Hälfte des Products aus der Länge des Bogens in den Halbmesser giebt den Inhalt eines dem Ausschnitt gleichen Dreyecks (254 §.): also den Inhalt des Ausschnitts selbst.

Wenn der Bogen AEB 96 Fuß lang ist, und 43° hält; so ist AC = 127,9 Fuß: also der Ausschnitt AEBC = $\frac{1}{2}$ × 127,9 × 96 Q. F. = 6139,2 Q. F.

Weis man, wie groß die der Grundlinie AC oder AB zugehörige Höhe des Dreyecks ABC sey; so läßt sich das Dreyeck ABC nach dem 279 §. berechnen. Wird alsdenn die Fläche dieses Dreyecks vom Inhalt des Ausschnitts AEBC subtrahirt; so giebt der Rest den Inhalt des Abschnitts AEBD.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometrie,

nebst

Berechnung der körperlichen Grössen.

Der XII. Abschnitt.

Von den verschiedenen Lagen grader Linien, und ebener Flächen, gegen andre ebene Flächen.

293 §.

Wenn man sich von einem geometrischen Körper eine solche Vorstellung macht, wie sie im 4. §. ist beschrieben worden; so enthält diese Vorstellung nichts weiter, als dieses, daß ein Raum von einer gewissen Grösse in gewissen Gränzen eingeschlossen sey. Diese Gränzen geben dem Körper das, was wir seine Gestalt oder Figur nennen, und eben deswegen heißt ein jeder körperlicher Raum, der von allen Seiten durch gewisse Gränzen eingeschlossen ist, eine körperliche Figur, die man also von einer ebenen Figur (29 §.) wohl unterscheiden muß. Die Gränzen einer solchen körperlichen Figur sind Oberflächen (5. §.) und dies können sowohl ebene als auch krumme Flächen seyn.

294 §.

Eine einzige ebene Fläche kann keine körperliche Figur einschliessen, wohl aber eine einzige

ge krumme Fläche, wie das Beyspiel einer Kugel beweiset.

Wenn man sich nemlich eine einzige ebene Fläche in Gedanken allein vorstellet; so ergiebt sich leicht, daß diese zwar jeden Raum, in welchem man sich diese Ebene vorstellet, in zwey Stücke theile, übrigens aber weder das eine, noch das andre dieser beyden Stücke von allen Seiten einschliessen könne, man mag sich die Ebene so groß man will, vorstellen.

295 §.

Eine ebene Fläche wird durch zweene, oder drey gegebene Puncte gelegt, wenn man ihr eine solche Lage giebt, daß entweder beyde, oder alle drey Puncte in diese Ebene fallen.

In der körperlichen Geometrie nimmt man es als eine Voraussetzung an, daß es allemahl möglich sey, durch zweene, oder auch durch drey gegebene Puncte, die nicht in grader Linie liegen, eine Ebene zu legen.

Dabey stellt man sich die Ebene von unbestimmter Grösse vor, so daß man sie in jedem besondern Fall so groß nehmen kann, als nöthig ist.

Daß man sie durch einen Punct legen könne, ist augenscheinlich: aber um diesen Punct kann man sie, wie man will, drehen, und sie auf solche Art auch an den zweyten Punct bringen. Nun gehet die Ebene zugleich durch die grade Linie, die durch diese zweene Puncte bestimmt wird (10 §.). Aber um eben diese grade Linie läßt sich die Ebene noch drehen, und der dritte Punct mag ausser dieser Linie liegen wo er wolle: so wird man auf solche Art die Ebene auch an diesen dritten Punct bringen können, wenn man sie nur groß genug annimmt.

296 §.

112 F. Wenn man durch drey, nicht in grader Linie nie liegende Puncte *A*, *B*, *C* eine Ebene *DE* gelegt hat; so ist dadurch die Lage dieser Ebene völlig bestimmt, und man kann durch eben die drey Puncte keine andre Ebene legen, die von der vorigen, der Lage nach, unterschieden ist, ob sie gleich grösser, oder kleiner seyn könnte. Legt man durch eben die Puncte noch mehr Ebenen; so fallen sie insgesammt mit der ersten zusammen.

297 §.

135 F. Durch eine und eben dieselbe grade Linie AB kann mehr als eine Ebene gelegt werden (295 §.), und sodann schneiden diese Ebenen einander in dieser graden Linie AB. Allemahl aber, wenn zwo Ebenen CD, EF einander schneiden, so giebt es eine grade Linie, wie AB, die man ihre Durchschnittslinie nennt. Ausser dieser graden Linie AB können beyde Ebenen nichts gemein haben: denn wäre nur noch ein Punct G ausser der graden Linie AB in beyden Ebenen zugleich; so müßten beyde Ebenen zusammenfallen, und könnten einander nicht schneiden (296 §.).

298 §.

135 F. Zieht man durch einen Punct H in der Ebene CD, und einen andern K, der ausser ihr liegt, die grade Linie KL: so schneidet die Ebene CD die grade Linie KL. Allemahl, wenn eine Ebene CD eine grade Linie KL schneidet, so giebt es einen Durchschnittspunct, wie H, und ausser demselben kann die Ebene CD mit der graden Linie KL nichts gemein haben. Denn wäre noch ein Punct I in beyden zugleich: so

fiele

fiele KL ganz in CD (10 §.), und CD könnte KL nicht schneiden.

Jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene CD liegende Puncte K und L gezogene grade Linie KL, wird von der Ebene CD geschnitten: und jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene EF, liegende Puncte C und D gelegte Ebene CD, schneidet EF.

299 §.

Zwo ebene Flächen allein können keinen Körper 136
einschliessen. Ja dies können auch drey Ebenen F.
noch nicht bewerkstelligen; es werden wenigstens vier Ebenen dazu erfodert. Man stelle sich eine Ebene, wie BCD vor, und gebe ihr die Gestalt eines Dreyecks. Durch eine Seite BC lege man eine neue Ebene ACB, und ziehe in derselben willkührlich die grade Linie CA. Man nehme einen Punct A in CA, einen andern D in CD, und lege durch A, C und D, die Ebene ACD: so wird von diesen dreyen Ebenen um C herum zwar ein körperlicher Raum eingeschlossen, dieser ist aber noch nicht von allen Seiten begränzt. Nimmt man aber überdem einen Punct A in AC, B in BC, D in CD, und legt durch A, B, D eine vierte Ebene ABD: so kommt eine körperliche von vier ebenen Flächen eingeschlossene Figur heraus.

300 §.

Die ebenen Flächen, welche den Körper einschliessen, heissen seine Seitenflächen (hedræ) so wie die graden Linien, worin die Seitenflächen einander schneiden, seine Seitenlinien (termini lineares) genannt werden.

Die Anzahl der Seitenlinien ist in jedem Körper grösser, als die Anzahl der Seitenflächen. Es sey

nemlich die Anzahl der Seitenflächen = h so groß, als sie wolle, so wird die Anzahl der Seitenlinien aller Seitenflächen nicht kleiner, als 3 h seyn können, weil jede Seitenfläche wenigstens 3 Seiten-Linien hat (30 §). Aber jede Seitenfläche hat mit einer andern anliegenden eine Seitenlinie gemein: demnach ist die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers nur halb so groß, als die Anzahl der Seitenlinien aller Seitenflächen. Wenn also l die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers ist: so kann l nicht kleiner, als $\frac{3}{2} h$ seyn.

301 §.

Die Anzahl aller gradlinichten Winkel auf der gesammten Oberfläche des Körpers ist so groß, als die Anzahl der Winkel aller Seitenlinien der gesammten Seitenflächen (31 §). Aber diese ist doppelt so groß, als die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers. Folglich ist die Anzahl aller gradlinichten Winkel auf der Oberfläche des Körpers = 2 l. Es sey die Anzahl aller Winkel = w, so ist $w = 2l$. Nun ist $2l$ nie kleiner, als 3 h (300 §) also auch w nie kleiner als 3 h.

302 §.

Im Umfange ebener Figuren waren nur die Seiten und Winkel zu unterscheiden, und das machte gleich anfangs in der ebenen Geometrie die Untersuchungen über die Natur gradlinichter Winkel, oder über die verschiedenen Lagen einer graden Linie gegen andre, die mit ihr in einer Ebene gezogen sind, nothwendig: Die ganze den eckigten Körper umgebende Gränze bestehet aus ebenen Seitenflächen, die einander gleichfalls unter gewissen Winkeln schneiden, und selbst die Seitenlinien machen mit den Seiten-

flächen

flächen gewisse Winkel. Schon um deßwillen würde in der körperlichen Geometrie mit Untersuchungen über die mancherley möglichen Lagen einer graden Linie gegen eine Ebene, oder einer Ebene gegen die andre, der Anfang gemacht werden müssen, wenn auch nicht ausserdem die dahin gehörigen Lehren ihren mannigfaltigen sehr ausgebreiteten Nutzen hätten.

303 §.

Wenn eine Ebene CG eine andre FH in der gra- 137
den Linie AB schneidet: so kann man durch einen Punct F. B in der Ebene CG auf AB die senkrechte Linie CD, und zugleich durch eben den Punct B in der Ebene FH auf AB die senkrechte Linie EF ziehen (88 §). Legt man nun durch den Winkel CBF die Ebene LM: so stehet AB auf zwoen unterschiedenen in der Ebene LM gezogenen graden Linien im Durchschnittspunct B senkrecht.

Eine grade Linie AB also kann auf zwoen andern CD, EF, die sich in B schneiden, im Durchschnittspunct B senkrecht seyn, wenn sie mit ihnen nicht in einer Ebene liegt, welches aber nicht seyn könnte, wenn AB ebenfalls in der Ebene LM gezogen wäre.

304 §.

Wenn eine grade Linie AB, so von einer Ebene 137
LM in B geschnitten wird, daß sie auf allen durch B F. in der Ebene LM gezogenen graden Linien BC, BI, BK, BF, u. s. f. senkrecht ist; so schneidet LM die grade Linie AB senkrecht, und AB steht auf der Ebene LM senkrecht, oder lothrecht, auch heißt AB eine Normallinie auf LM. Ist aber AB nicht auf allen durch B in LM gezogenen graden Linien senkrecht; so wird AB von LM schief geschnitten, oder AB stehet schief auf LM.

305. §.

305 §.

138 F. **Eine grade Linie *AB*, die nur auf zwoen in der Ebene *LM* gezogenen graden Linien *CD*, *EF* im Durchschnittspunct *B* senkrecht ist, stehet auf der Ebene *LM* selbst senkrecht.**

Beweis. Man ziehe in der Ebene LM durch B eine grade Linie GH, die von den vorigen CD und EF unterschieden ist. Wenn nun diese zwischen des Winkels CBE Schenkeln fällt; so nehme man BC und BE von willkührlicher Grösse, und ziehe CE, welche GH in G schneiden wird (33 §). Man nehme ferner BD=BC, BF=BE, und ziehe DF: so ist DF mit CE parallel, weil BC:BD=BE:BF (205 §), und GH schneidet auch DF so, daß BG=BH wird (205 §). Ueberdem wird EC=DF, und EG=FH (54 §). Ziehet man nun von A nach den Puncten C, D, E, F, G, H, grade Linien, so wird AC=AD, AE=AF (54 §): weil überdem auch EC=DF; so wird der Winkel AEG=AFH (64 §), folglich auch AG=AH (54 §). Demnach ist in den Dreyecken AGB und AHB der Winkel ABG=ABH (64 §), und AB auf GH senkrecht.

Weil dieser Beweis von allen graden Linien gilt, die durch B in der Ebene LM gezogen werden können: so ist AB auf LM senkrecht.

Durch einen Punct B in der Ebene LM läßt sich nur eine grade Linie AB auf LM senkrecht ziehen. Denn wäre auch BK auf LM senkrecht, so würde LM von der Ebene ABK in BD geschnitten, und es müste ABD=R=KBD seyn, welches nicht seyn kann (18 §).

Auch durch einen Punct A ausserhalb LM läßt sich nur eine grade Linie AB nach LM senkrecht ziehen.

hen. Denn wäre auch AD auf LM senkrecht: so würde LM von der Ebene BAD in BD geschnitten, so, daß ABD = R = ADB wäre, welches dem 72 § zuwider ist.

Die senkrechte Linie AB ist unter allen, die von A nach der Ebene LM gezogen werden können, die kürzeste (75 §), und also die Entfernung des Puncts A von der Ebene LM (35 §).

306 §.

Wenn drey grade Linien *BC*, *BG*, *BP*, einander in einem Punct *B* schneiden, und eine vierte *AB* auf allen dreyen im Durchschnittspunct *B* senkrecht stehet; so liegen *BC*, *BG*, *BP* in einer Ebene.

Beweis. Man lege durch den Winkel CBG eine Ebene LM, wenn diese nun nicht zugleich durch BP gehet; so wird sie die Ebene des Winkels ABP in einer graden Linie BE schneiden, die von BP verschieden ist. Nun wird aber ABE = R (305 §), und vermöge der Voraussetzung ist auch ABP = R, welches nicht zugleich seyn kann (21 §). Also muß die Ebene CBG durch BP gehen, wenn auch ABP ein rechter Winkel ist.

307 §.

Wenn *AB* auf der Ebene *LM* senkrecht und 139
CD mit *AB* parallel ist; so ist auch *CD* auf F.
LM senkrecht.

Beweis. Die Ebene der Parallelen AB, CD, schneidet LM in der graden Linie BD, und in dieser Ebene liegt auch DA (10 §). In der Ebene LM setze man DE auf DB senkrecht, mache DE = AB, und ziehe BE: so ist ABD = R = BDE, und BD = BD, also auch AD = BE (54 §). Zieht man also ferner

AE;

AE; so passen die Dreyecke AEB und AED auf einander (64 §), weil die Seiten AB, DE, und AD, BE, gleich groß sind, und AE zu beyden Dreyecken gehört: also ist ADE = ABE = R. Ueberdem war BDE = R, folglich ist ED auf der Ebene ABCD senkrecht, und CDE = R (305 §). Weiter ist CDB = 2R − ABD (83 §) = R: also steht CD auf LM senkrecht (305 §).

308 §.

139 F. Zwo grade Linien *AB*, *CD*, die auf einer Ebene *LM* senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. Man kann durch D eine grade Linie mit AB parallel ziehen, diese steht auf LM senkrecht (307 §), und muß mit DC zusammen fallen (305 §): demnach ist DC selbst mit AB parallel.

309 §.

140 F. Von einem Punct *A*, der ausser der Ebene *LM* liegt, nach *LM* eine senkrechte Linie zu ziehen.

Aufl. Man ziehe in der Ebene LM eine grade Linie CD, und von A auf CD die senkrechte Linie AE. Durch E ziehe man EF in der Ebene LM auf CD, und hierauf AB durch A auf EF senkrecht: so steht AB auch senkrecht auf der Ebene LM.

Beweis. Weil DEA = R = DEB, so ist CD auf der Ebene ABE senkrecht. Durch B ziehe man GH mit CD parallel, so steht auch GH auf der Ebene ABE senkrecht (307 §): also ist ABH = R = ABE, und AB ist auf LM senkrecht (305 §).

Durch einen in der Ebene LM gegebenen Punct P kann man also auf LM eine senkrechte Linie PQ ziehen, wenn man von einem willkührlichen Punct A

ausser

ausser LM nach LM die senkrechte Linie AB, und hiernächst PQ mit AB parallel ziehet (307 §).

310 §.

Zwo grade Linien, *AB*, *CD*, die mit einer 139.
dritten *EG* parallel sind, sind untereinander F.
selbst parallel, auch wenn nicht alle drey in einer Ebene liegen.

Beweis. In der Ebene CDEG ziehe man ED, in der Ebene ABEG aber EB auf EG senkrecht, und lege durch BED die Ebene LM: so ist EG auf LM senkrecht (305 §): also sind auch AB, und CD auf LM senkrecht (307 §), folglich AB und CD einander parallel (308 §).

311 §.

Eine grade Linie AB ist mit einer Ebene EF pa- 141
rallel, oder gleichlaufend, wenn sie mit der Ebene F.
nicht zusammenstossen kann, die Ebene und die Linie mögen so groß werden, als man will.

Wenn *AB* mit einer in der Ebene *EF* liegenden graden Linie *CD* parallel ist; so ist sie auch mit der Ebene *EF* parallel. Denn AB und CD bleiben allemal in einer Ebene. Wenn also AB mit EF zusammenstiesse; so müste es in einem Puncte geschehen, der in beyden Ebenen ABCD und EF zugleich, also in beyder Durchschnitt CD befindlich wäre: welches wider die Voraussetzung ist.

Wenn die grade Linie AB mit der Ebene EF parallel ist, und eine Ebene durch AB schneidet EF in CD, so ist auch CD mit AB parallel: denn beyde grade Linien liegen in einer Ebene, und können nicht zusammen stossen, weil sonst AB mit EF zusammen stiesse.

312 §.

312 §.

142 Zweene Winkel *ACB*, *DEF*, die nicht in
F. einer Ebene liegen, sind gleich groß, wenn ihre Schenkel *CA*, *ED*, imgleichen *CB*, *EF*, die in Absicht der durch die Spitzen gezogenen graden Linie *CE* nach einer Seite liegen, parallel sind.

Beweis. Man nehme CA = ED, und CB = EF; so sind AD und BF beyde mit CE parallel, und überdem beyde eben so groß, als CE (96 §). Also sind auch AD und BF parallel (310 §), und gleich groß: mithin ferner AB = DF, und ACB = DEF (64 §).

313 §.

137 Wenn eine Ebene CG die andre FH in der graden
F. Linie AB schneidet; so schliessen beyde an der Durchschnittslinie AB einen Winkel ein, den man einen Flächen-Winkel nennen könnte. Man nehme in AB irgendwo einen Punct B und ziehe durch B auf AB ein Paar senkrechte Linien BC, und BF, wovon eine BC in der einen Ebene CG, die andre BF in der andren Ebene FH liegt. Der Winkel CBF, den diese beyde Linien einschliessen, heißt der Neigungs-Winkel der Ebenen CG und FH gegen einander. Er ist mit dem Flächen-Winkel an AB einerley; und wenn es ein rechter Winkel ist, so stehen die Ebenen CG, FH auf einander senkrecht.

Dieser Winkel CBF ist nemlich bey unveränderter Lage beyder Ebenen gegen einander immer einerley, wo man auch den Punct B in der Durchschnittslinie AB annimmt. Man setze auch die graden Linien *bc* und *bf*, jene in CG, diese in FH auf AB senkrecht; so sind

BC,

BC, *bc*, imgleichen BF, *bf* parallel (80 §) und der Winkel CBF = *cbf* (312 §).

314 §.

1. Die Durchschnittslinie AB zwoer Ebenen CG, FH steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels CBF senkrecht: (305 §) und wenn eine Ebene LM die Durchschnittslinie AB in B senkrecht schneidet; so ist sie die Ebene des Neigungswinkels. Denn wenn CG von LM in BC, und FH von LM in BF geschnitten wird; so ist ABC = R = ABF (304 §).

2. Wenn eine Ebene AG eine andre LM in AD senk- 143
recht schneidet; so läßt sich durch AD keine von AG F.
verschiedene Ebene AH auf LM senkrecht setzen. Denn legt man durch einen Punct B des Durchschnitts AD eine auf AD senkrechte Ebene, welche AG in BC, AH in BE, LM in BF schneidet: so müste CBF = R = EBF seyn, wenn AG und AH beyde auf LM senkrecht stünden, welches nicht seyn kann (21 §).

315 §.

Wenn die grade Linie *BC* auf der Ebene 143
LM senkrecht ist; so steht jede durch *BC* geleg- F.
te Ebene *AG* auf *LM* ebenfalls senkrecht.

Beweis. Die Ebene AG schneide LM in der graden Linie AD, und weil diese durch B gehen muß; so setze man BF in der Ebene LM auf AD senkrecht. Weil ferner BC auf LM senkrecht ist; so ist zuerst CBA = R (304 §), also CBF der Ebene AG Neigungs-Winkel gegen LM (313 §). Es ist aber auch CBF = R (304 §), also AG auf LM senkrecht (313 §).

Demnach stehen zwo Ebenen, die einander schneiden, auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

316 §.

144 F. Wenn eine Ebene AB, die andre AC in AD schneidet; so kann man der Kürze wegen den Flächen-Winkel an AD, unter welchem die Ebenen einander schneiden, durch vier Buchstaben BADC bezeichnen, wovon die beyden mittlern A, D, an der Durchschnittslinie stehen.

317 §.

144 F. Zweene gleich grosse Flächen-Winkel *BADC*, *KHLI* passen in einander.

Beweis. In AD und HL nehme man die Puncte F und N willkührlich, und ziehe durch sie gehörig die Neigungswinkel EFG, MNO. Man lege die Ebene HI auf AC so, daß HL in AD, und N in F fällt; so muß NO in FG, und die Ebene MNO mit EFG zusammen fallen (313 §): also fällt NM in FE (18 §) und die Ebene HNM oder HK fällt mit AFE oder AB zusammen (296 §).

318 §.

143 F. Eine grade Linie *BC* die in einer von zwoen senkrechten Ebenen *AG*, *LM* auf beyder Durchschnitt *AD* senkrecht ist, steht auch auf der andern Ebene *LM* senkrecht.

Beweis. In LM ziehe man BF auf AD senkrecht; so hat man den Neigungswinkel CBF = R (213 §). Da nun auch CBA = R; so steht CB auf LM senkrecht (305 §).

Eine grade Linie, die von einem Punct C der Ebene *AG* auf die ihr senkrechte Ebene *LM* lothrecht gezogen ist, muß in der Ebene *AG* liegen. Denn es seh CB auf dem Durchschnite AD senkrecht. Fiele nun eine senkrechte Linie CK auf LM ausser der Ebene AG; so wären CB und CK beyde

beyde auf LM senkrecht, welches nicht seyn kann (305 §).

Wenn *AG* und *LM* auf einander senkrecht sind; und durch einen Punct *B* in der Durchschnittslinie *AD* eine grade Linie *BC* auf *LM* senkrecht gesetzt wird; so liegt *BC* in der Ebene *AG*. Denn sonst wären CAD und GAD zwo verschiedene auf LM senkrechte Ebenen (315 §), welches dem 314 §. n. 2. widerspricht.

319 §.

Wenn zwo Ebenen *CG*, *FH* einander in *AB* schneiden, und auf einer dritten *LM* senkrecht sind: so ist auch ihr Durchschnitt *AB* auf *LM* senkrecht. 137 F.

Beweis. In der Ebene LM ziehe man BK auf BC, und BI auf BF, beyder Ebenen Durchschnitte mit LM senkrecht: so ist BK auf CG, und BI auf FH senkrecht (318 §). Demnach ist ABK = R = ABI (304 §), folglich AB auf LM senkrecht (305 §).

1. Eine Ebene LM also, die zwo andre CG, FH, senkrecht schneidet, ist die Ebene ihres Neigungswinkels (314 §. n. 1.)

2. Eine grade Linie *EH* ist mit der Ebene *CG* parallel, wenn beyde auf einer und eben derselben andern Ebene *LM* senkrecht sind. Denn eine Ebene HF durch EH und einen Punct A in CG gelegt ist auf LM senkrecht (315 §), und ihr Durchschnitt AB mit CG ist ebenfalls auf LM senkrecht: also ist EH mit AB (308 §), folglich auch mit GG parallel (311 §).

320 §.

Wenn von einem Punct *A* einer Ebene *DH*, die eine andre *DG* in *CD* schneidet, auf 145 F.

letztere die grade Linie *AB* senkrecht gesetzt, und hiernächst von *A* oder *B* nach *CD* die grade Linie *AE* oder *BE* senkrecht gezogen wird; so ist *AEB* der Neigungswinkel.

Beweis. Die Ebene EAB ist allemahl auf DG senkrecht (315 §.). Wenn also

1. BE auf CD senkrecht ist, so steht CD auf der Ebene AEB senkrecht, (318 §.) also ist AEB die Ebene des Neigungswinkels (314 §. n. 1.).

2. Wenn umgekehrt AE auf CD senkrecht ist, so ist es BE ebenfalls. Denn wäre nicht EB, sondern E*b* auf CD senkrecht, so wäre AE*b* der Neigungswinkel, (313 §.) und die Ebene AE*b* auf DG senkrecht. Setzte man nun A*b* auf E*b* senkrecht, so wäre auch A*b* auf DG senkrecht, (318 §.) worauf schon AB senkrecht ist, welches dem 305 §. widerspricht.

321 §.

140 F. Der Neigungswinkel einer graden Linie *AE* gegen eine Ebene *LM*, welche sie in E schneidet, ist der gradlinichte Winkel AEF, den die Durchschnittslinie EF einer durch AE auf LM senkrecht gesetzten Ebene mit AE einschließt.

1. Läßt man von einem Punct A der graden Linie AE auf LM das Loth AB fallen, und ziehet EB; so ist AEB der Linie AE Neigungswinkel gegen LM. Denn die Ebene AEB ist auf LM senkrecht, (315 §) und schneidet sie in EB. Man kann AB das Neigungsloth nennen.

140 F. 2. Parallellinien *AE*, *QR* sind gegen einerley Ebene *LM* unter einerley Winkel geneigt. Wenn nämlich AB, QP auf LM senkrecht stehen; so sind AEB, QRP die Neigungswinkel (320 §.). Aber AB, und QP sind parallel, (308 §.) also der

Winkel A=Q (312 §.), folglich auch AEB=QRF (87 §.).

322 §.

Eine grade Linie *ac*, oder *AB* kann nicht 145
auf zwoen Ebenen *DG*, *DH*, die einander F.
in *CD* schneiden, zugleich senkrecht seyn.

Beweis. Die grade Linie *ac* gehe zuerst durch einen Punct E der Durchschnittslinie CD, und man ziehe EA in der einen Ebene DH: so schneidet die Ebene des Winkels AE*a* auch die andre Ebene DG in einer graden Linie EB. Wäre nun *ab* auf beyden Ebenen zugleich senkrecht; so wäre AE*a*=R=BE*a*, welches unmöglich ist (21 §.).

Geht aber AB nicht durch CD; so ziehe man von einem Punct E in dieser Linie CD sowohl nach A, als auch nach B, grade Linien: dies giebt ein Dreyeck ABE, worinn sowohl bey A, als auch bey B ein rechter Winkel wäre, wenn AB beydes zugleich auf DG und DH senkrecht stünde, welches dem 72 §. widerspricht.

323 §.

Zwo Ebenen KL, MN, die eine solche Lage ha- 146
ben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mö- F.
gen nach allen Seiten, so weit man will, erweitert werden, heissen parallele Ebenen.

Wenn eine grade Linie *AB* auf zwoen Ebenen *KL*, *MN* zugleich senkrecht stehet; so sind *KL*, *MN* einander parallel. Denn sie können einander nicht schneiden (322 §.).

Wenn demnach ausser der Ebene MN ein Punct A gegeben ist; so kann man durch A auf folgende Art eine Ebene mit MN parallel legen. Man lasse von A auf MN die senkrechte Linie AB fallen, ziehe durch

B in der Ebene MN ein Paar grade Linien BC, BD, und mit ihnen durch A die graden Linien AE, AF, parallel. Durch den Winkel EAF lege man die Ebene KL: so ist KL mit MN parallel. Denn es ist BAE = R = BAF, also AB auf beyden Ebenen MN, KL senkrecht.

Wenn zwo parallele Ebenen KL, MN von einer dritten BE geschnitten werden; so sind die Durchschnittslinien AE, BC parallel: denn sie liegen in der schneidenden Ebene, und können nicht zusammenstossen, weil sonst KL mit MN zusammenstiesse, welches der Voraussetzung entgegen ist.

324 §.

146 F. Die Ebenen *KL*, *MN* zweener Winkel *EAF*, *OPQ* sind parallel, wenn die Schenkel *AE*, *PO*, und *AF*, *PQ* dieser Winkel parallel sind.

Beweis. Von A falle auf MN die lothrechte Linie AB, durch B aber sey BC mit PO, und BD mit PQ parallel gezogen: so ist auch BC mit AE, und BD mit AF parallel (310 §.). Also ist nicht allein BAF = 2R − ABD = R, sondern auch BAE = 2R − ABC = R (83 §.), und AB auf KL senkrecht (305 §.), folglich KL mit MN parallel (323 §.).

Wenn zwo Parallellinien AE, QR (140 Fig.) von der Ebene LM in E und R geschnitten werden, so sind ihre Neigungsebenen AEB, QRP, gegen LM parallel (321 §.).

325 §.

146 F. Wenn die Ebene *KL* mit *MN* parallel, und von einem Punct *A* dieser Ebene *KL* die grade Linie *AB* auf *MN* senkrecht gezogen ist; so ist *AB* auch auf *KL* senkrecht.

Beweis.

Beweis. Durch B ziehe man ein Paar grade Linien BC, BD in der Ebene MN: so schneiden die Ebenen ABC, ABD auch KL in AE und AF, und es ist AE mit BC und AF mit BD parallel (323 §.). Demnach ist BAE = 2R — ABC = R, und BAF = 2R — ABD = R (83 §.), folglich AB auf KL senkrecht.

Durch einen gegebenen Punct A läßt sich nicht mehr als eine Ebene KL mit MN parallel legen; denn man kann AB auf MN senkrecht ziehen, und alsdenn stünde AB auf beyden durch A mit MN parallel gelegten Ebenen senkrecht, gegen den 322 §.

Eine Ebene also, die eine von zwoen parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andre: und zwo Ebenen, die mit einer dritten parallel sind, müssen untereinander selbst parallel seyn. Denn schnitten jene beyde einander; so schnitte jede von ihnen die dritte, womit sie parallel seyn soll.

326 §.

Eine grade Linie *CD*, die eine von zwoen 147
parallelen Ebenen *KL* schneidet, trift verlän- F.
gert auch die andre *MN*, und ist gegen beyde unter einerley Winkel geneigt.

Beweis. Wenn CD die Ebene KL in A schneidet, und AB auf MN senkrecht gezogen ist: so steht AB auch auf KL senkrecht (325 §.). Die Ebene DAB also, welche KL in AF, und MN in BE schneidet, ist sowohl auf KL, als auch auf MN senkrecht (315 §.), und AF, BE sind Parallellinien (323 §). Demnach schneiden CD und EB einander (82 §.), folglich auch CD und MN. Wenn nun E der Durchschnittspunct ist; so ist CA gegen KL unter dem Winkel CAF, gegen MN aber, unter dem Winkel AEB geneigt (320 §.), und es ist CAF = AEB (84 §.).

327 §.

146 Parallele Ebenen *KL*, *MN*, sind durchgän-
F. gig gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Wenn AB und EC die Entfernungen der Puncte A und E von MN sind: so sind AB, EC parallel (308 §.), und die Durchschnitte AE, BC der Ebenen KL, MN mit der Ebene AECB sind auch parallel (323 §.), also AB = EC. Eben so erhellet, daß eines jeden andern Puncts F in der Ebene KL Entfernung FD von MN = AB sey.

Wenn eine grade Linie AE durch A mit MN parallel ist; so liegt sie in der mit MN durch A parallelen Ebene KL: denn schnitte sie KL, so schnitte sie auch MN (326 §.). Also ist auch AE durchgängig gleich weit von MN entfernt.

Wenn drey Puncte A, E, F von der Ebene MN gleich weit entfernt sind; so ist die Ebene KL durch A, E und F mit MN parallel. Denn die gleichen Entfernungen AB, EC, FD sind auch parallel (308 §.). Zieht man also AE, AF, BC, BD; so sind ABCE, ABDF rechtwinklichte Parallelogramme (96. 97 §.), und AB ist auf KL senkrecht (305 §.), also KL mit MN parallel (323 §.).

Alle Puncte A, E, F, G, u. s. f., die von der Ebene MN gleich weit entfernt sind, liegen in einer Ebene. Denn es sey AB = EC = FD = GH: so muß eine Ebene KL durch A, E und F, auch durch G gehen. Im Gegentheil würde KI. doch mit MN parallel seyn, und GH irgendwo in I schneiden (326 §), da dann IH = AB wäre. Es wird aber vorausgesetzt, daß GH = AB sey, und beydes zugleich kann nicht seyn.

328 §.

328 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, werden von 148
dreyen parallelen Ebenen *HI*, *KL*, *MN*, in F.
proportionale Theile geschnitten.

Beweis. Wenn A, E, B und C, F, D die Durchschnittspuncte sind; so ziehe man BC, welche KL in G schneidet. Die Ebene ABC wird HI in AC, und KL in EG schneiden, so wie die Ebene BCD von KL in GF und von MN in BD geschnitten wird. Da nun AC und EG, imgleichen BD und GF parallel sind (323 §.); so ist AE:EB=CG:GB, und CG:GB=CF:FD (203 §.), also AE:EB= CF:FD.

Aus dieser Proportion folget auch AB:EB=CD: FD, und AB:AE=CD:CF (189. §.).

329 §.

Parallele Ebenen *KL*, *MN* werden von ei- 149
ner dritten Ebene *PQ* unter gleichen Neigungs- F.
winkeln geschnitten, wovon die Oefnungen eine übereinstimmige Lage haben.

Beweis. Die Durchschnitte AB, CD sind parallel (323 §.). Man lege durch einen Punct F in AB eine Ebene auf AB senkrecht, welche PQ in FE, und KL in FH schneidet: so ist EFH der Neigungswinkel der Ebene PQ gegen KL (313 §.). Aber EF trift verlängert auch CD in G (85 §.), also schneidet die Ebene EFH auch CD, und zwar senkrecht (307 §.). Wenn also GI ihr Durchschnitt mit MN ist; so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN. Ueberdem sind FH, GI parallel (323 §.), also EFH = FGI (84 §.).

330 §.

149 F. Wenn zwo Ebenen *KL*, *MN* von einer dritten *PQ* so geschnitten werden, daß die Durchschnitte *AB*, *CD* parallel, und die Neigungswinkel gegen *KL*, *MN* auf eben der Seite von *PQ* gleich groß sind; so sind *KL*, und *MN* parallel.

Beweis. Es sey EFH der Ebene PQ Neigungswinkel gegen KL: so ist die Ebene EFH auf AB senkrecht (313 §.), und schneidet auch CD in G, wo EF verlängert CD trift (85 §.), und zwar senkrecht (307 §.). Wenn also GI der Ebene EFH Durchschnitt mit MN ist; so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN, und vermöge der Voraussetzung EFH=FGI. Also ist FH mit GI parallel, und weil auch AB mit CD parallel ist; so ist die Ebene KL mit MN parallel (324 §.).

Der XIII. Abschnitt.

Von den Prismatischen Körpern und Pyramiden.

331 §.

150 F. Drey und mehr ebene Flächen AK, BF, CG, DH, EI, können einander so schneiden, daß alle Durchschnittslinien AF, BG, CH, DI, EK mit einander parallel laufen, übrigens aber diese Ebenen einen Körperlichen Raum ringsherum begränzen, der nur noch um deßwillen nicht völlig geschlossen ist, weil die parallelen Durchschnittslinien nicht zusammen laufen. Man schneide jene parallelen Durchschnitts-

schnittslinien also auch die Ebenen dieser Parallellinien mit einer neuen Ebene LM, so giebt sich eine gradlinichte Durchschnittsfigur ABCDE, und eine andre Ebene NO mit LM parallel gelegt giebt die Durchschnittsfigur FGHIK. Alle diese Ebenen zusammen begränzen einen Körper AH, der ein Prisma oder Pfeiler, oder Eckſäule heißt. Die Ebenen der Parallellinien AF und BI, BG und CH, u. s. f. heissen seine Seitenflächen, die parallelen Figuren ABCDE, FGHIK aber die Grundflächen des Prisma.

Weil AB und FG, BC, und GH u. s. f. Parallellinien sind (323 §); so folgt, daß die Seitenflächen eines jeden Prisma Parallelogramme sind.

Demnach sind die Grundflächen ABCDE, FGHIK gleiche und ähnliche Figuren. Es ist nemlich AB = FG, BC = GH, u. s. f. und überdem sind die Winkel ABC = FGH, BCD = GHI u. s. f. (312 §).

Also ist auch die Durchschnitts-Figur allemahl den Grundflächen gleich und ähnlich, wenn man ein Prisma mit einer den Grundflächen parallelen Ebene schneidet.

Jedes Prisma hat so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat: es erhält daher den Nahmen eines dreyseitigen, vierseitigen, fünfseitigen Prisma, u. s. f. von der Anzahl seiner Seitenflächen.

332 §.

Wenn die Parallellinien AF, BG, u. s. f. also auch die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen (315 §); so heißt der Körper ein gerades, widrigenfalls aber ein schiefes Prisma.

Die

Die Seitenflächen eines graden Prisma sind also Rechtecke.

333 §.

151 Ein Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen F. Grundflächen ABCD, EFGH Parallelogramme sind.

Demnach liegen jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen, wie AH, BG einander parallel, weil AD mit BC, und AE mit BF parallel ist (324 §).

Also können jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen, wie AH, BG, für die Grundflächen des Parallelepipedi angenommen werden, da dann die Grundflächen AC, EG Seitenflächen werden.

Jedem Flächenwinkel an einer Seitenlinie AE, den zwo Seitenflächen einschliessen, steht ein andrer an der Seitenlinie CG gegenüber. Weil überdem AE, CG, parallel sind; so kann man durch beyde Seitenlinien eine Ebene legen. Ihre Durchschnitte AC, EG, mit den Grundflächen sind alsdenn Diagonallinien dieser Grundflächen, und die schneidende Ebene kann auf ähnliche Art eine Diagonalfläche des Parallelepipedi heissen. Letzteres wird dadurch in zwey dreyseitige Prismen getheilt.

334 §.

151 Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist F. ein grades Parallelepipedum, dessen Grundflächen AC, EG Rechtecke sind. Es können also die Grundflächen Quadrate seyn; und weil die Seitenflächen Rechtecke sind (332 §), so werden sie ebenfalls Quadrate, wenn die Entfernung der Grundflächen von einander ihrer Seitenlinie gleich ist.

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum von dieser Art, welches also von sechs gleich grossen Quadraten ein-

eingeschlossen ist, heißt ein **Würfel**. Die Seitenlinie von jeder Seitenfläche heißt zugleich eine Seitenlinie des Würfels.

335 §.

Die Höhe des Prisma ist die Entfernung der einen Grundfläche von der andern. Daher kann im rechtwinklichten Parallelepipedo eine jede Seitenlinie die Höhe seyn, weil man jedes Paar der entgegengesetzten Seitenflächen als die Grundflächen ansehen kann.

336 §.

Wenn zwey Prismen nebst gleichen Höhen gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und wenn überdem ihre gleichnahmigen Seitenflächen (das ist, diejenigen, welche die Grundflächen in gleichnahmigen Seitenlinien schneiden) gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind: so sind die Prismen gleich groß.

Beweis. Denn die Grundflächen passen auf einander: und wenn man diese gehörig auf einander legt; so fällt jedes Paar gleichnahmiger Seitenflächen zusammen (317 §). Ueberdem fallen die Ebenen der entgegengesetzten Grundflächen zusammen (327 §): demnach müssen auch die Durchschnittslinien dieser letzten Ebenen, und der Seitenflächen, mithin die entgegengesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Also paßt ein Prisma in dem andern (16 §), und beyde sind gleich groß.

Würfel also, deren Seitenlinien gleich groß sind, sind selbst gleich groß. Von zweenen Würfeln aber mit ungleichen Seitenlinien ist derjenige der grössere, der die grössere Seitenlinie hat.

Gleich

Gleich grosse Würfel haben demnach gleich grosse Seitenlinien, und von ungleichen Würfeln hat der grössere eine grössere Seitenlinie, als der kleinere.

337 §.

152 F. Wenn ein Punct A ausser der Ebene einer gradlichten Figur BCDEF liegt, und wenn alsdenn von A nach allen Winkelspitzen dieser Figur grade Linien AB, AC u. s. f. gezogen sind; so schliessen die Ebenen der Dreyecke ABC, ACD u. s. f. mit der Ebene der Figur BCDEF einen Körper ein, der eine Pyramide, oder Spitzsäule, genannt wird. Der Punct A heißt der Pyramide Spitze, die Figur BCDEF ihre Grundfläche, die Dreyecke ABC, ACD, u. s. f. ihre Seitenflächen.

Jede Pyramide hat demnach so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat: daher erhellet leicht, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramiden sind, u. s. f. Wenn die Grundfläche auch ein Dreyeck, und also die Pyramide dreyseitig ist; so kann jede Seitenfläche als die Grundfläche angesehen werden.

Die Entfernung der Spitze einer Pyramide von ihrer Grundfläche heißt ihre Höhe.

338 §.

Wenn Pyramiden gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und überdem alle gleichnahmige Seitenflächen gegen die Grundflächen unter einerley Winkel geneigt sind; so sind sie gleich groß.

Beweis. Die Grundflächen passen auf einander: und wenn man sie gehörig auf einander legt; so fallen nicht allein die Ebenen jeder zwoen gleichnahmigen Seitenflächen zusammen (317 §), sondern

auch

auch alle Seitenlinien (297 §), und dieserwegen auch die Spitzen der Pyramiden. Also passen die Pyramiden in einander, und sind gleich groß.

339 §.

Wenn man ein Parallelepipedum *AB* mit einer Ebene *CD* schneidet, die zwoen Seitenflächen *AE*, *BF* parallel liegt; so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum *AC* zum ganzen *AB*, wie die Grundfläche des ersten *AK* zur Grundfläche des zweyten *AL*. 153 F.

Beweis. Es sey AF eine von den Seitenlinien, welche die Seitenflächen AE, BF schneiden; so wird eben diese Linie auch von CD irgendwo in D geschnitten. Wenn nun AD und AF commensurabel sind, und AG ihr gemeinschaftliches Maaß ist, so trage man AG auf AF so vielmahl auf, als es angehet, und man setze, es werde $AD = nAG$, und $AF = mAG$, also $AG = \frac{1}{m} AF$ und $AD = \frac{n}{m} AF$. Durch alle Theilungspuncte in AF lege man Ebenen mit CD parallel, und eine davon sey GH: so wird AC in n Parallelepipeda, und AB in m Parallelepipeda getheilt, wovon jedes $= AH$ ist (336 §), und man erhält $AC = nAH$, $AB = mAH$, also $AH = \frac{1}{m} AB$ und $AC = \frac{n}{m} AB$. Demnach ist $AC : AB = AD : AF$ (174 §).

In dem Fall, wenn AD und AF incommensurabel sind, kann man AF in so viele gleiche Theile, als man will eintheilen, so daß $AF = mAG$ sey, und

es

es wird $AG = \frac{1}{m} AF$ nie in AD aufgehen, wie groß auch die Zahl m angenommen wird. Indessen wird D allemal zwischen zweenen Theilungspuncten fallen, und wenn dies der $n$te, und $(n+1)$te Theilungspunct ist; so wird auch CD zwischen der $n$ten, und $(n+1)$ten Theilungs-Ebene fallen. Demnach sind wiederum ähnliche aliquote Theile von AF und AB gleichvielmahl in AD und AC enthalten, wie groß auch m angenommen ist, und die Reste sind jedesmahl kleiner als die gebrauchten Divisoren. Also folgt aus dem 175 §, es sey auch in diesem Fall $AC:AB = AD:AF$. Ferner hat man $AD:AF = AK:AL$, also auch $AC:AB = AK:AL$.

Die abgeschnittenen Stücke AC, DB verhalten sich demnach ebenfalls wie ihre Grundflächen AK, DL. Denn vermöge des Beweises ist $AC:AB = AK:AL$, und $AB:DB = AL:DL$, also $AC:DB = AK:DL$ (171 §).

340 §.

Gleich hohe Parallelpipeda auf gleichen und ähnlichen Grundflächen sind gleich groß.

154 F. Beweis. Ueber der Grundfläche ABCD des Parallelepipedi CE stehe noch ein andres Parallelepipedum, dessen zweyte Grundfläche QPRS mit EFGH, als der zweyten Grundfläche des ersten in einer Ebene liegt, so sind beyde Parallelepipeda gleich hoch. Die erweiterte Ebene der Seitenfläche BE schneide die Ebenen DP und CR in AI und BK, so ist AI ∥ BK. Eben die Ebene BE schneidet auch die Ebene PS, und wenn IK das Stück der Durchschnittslinie ist, das zwischen den wo es nöthig ist verlängerten

Paral-

Parallellinien PQ, RS liegt, so ist auch IK # AB, und AIKB ein Parallelogramm (323 §). Die Ebene der Seitenfläche CH schneide eben so die Ebenen DP und CK in DM und CL, die Ebene PS aber in LM, und LM sey das Stück der Durchschnittslinie zwischen den Parallellinien PQ, RS, so ist auch DMLC ein Parallellogramm. Wie nun auch ADMI, BCLK, Parallelogramme sind, so hat man auf eben der Grundfläche ein drittes Parallelepipedum, dessen zweyte Grundfläche MIKL ist. Zwo Seitenflächen dieses dritten Parallelepipedi, welches hier das mittlere heissen kann, fallen mit zwoen Seitenflächen des einen CE, und die beyden übrigen Seitenflächen des mittlern mit zwoen Seitenflächen des andern CP in einerley Ebene: und wenn bewiesen ist, daß das mittlere DK = CE sey, so folgt aus eben dem Beweise, es sey auch DK = CP, mithin CE = CP.

Daß aber das mittlere Parallelepipedum DK = CE sey, erhellet so. Die Körper AEIDHM, und BFKCGL, sind dreyseitige Prismen (331 §), ihre Grundflächen DHM und CGL sind gleich und ähnlich (64 §) weil DH = CG, DM = CL, und der Winkel HDM = GOM = GCL ist (83 §). Beyde Prismen stehen zwischen parallelen Ebenen ABKE, DCLH, und sind also gleich hoch (335 §); ihre Seitenflächen ADHE und BCGF, ADMI und BCLK, EHMI und FGLK sind gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt (329 §): also ist das Prisma AEIDHM = BFKCGL (306 §). Man nehme von beyden das dreyseitige Prisma FNIGOM ab, so bleiben gleiche vierseitige Prismen übrig, nemlich AEFNDHGO = BNIKCOML. Zu jedem dieser gleichen Körper setze man das dreyseitige Prisma

ANBDOC hinzu: so hat man gleiche Summen, also das mittlere Parallelepipedum DK = CE.

341 §.

155 Grade Parallelepipeda *AP*, *CQ*, auf gleichen obgleich unähnlichen Grundflächen *AB*, *CD*, in gleicher Höhe, sind gleich groß.

F.

Beweis. Die vier Seitenflächen CD, CS, DG, GS, schliessen eine Prismatische Fläche ein, wozu CG, EQ, als Grundflächen gehören (333 §). Diese prismatische Fläche sey über EQ hinaus erweitert, und EF = LB genommen, durch F aber eine Ebene mit CG oder EQ parallel gelegt; so ist die Durchschnittsfigur FTWK den Grundflächen EQ, CG, gleich und ähnlich (331 §), und EW ein Parallelepipedum, wovon die Seitenfläche EFTS der Seitenfläche LP des Parallelepipedi AP gleich und ähnlich ist. Denn beyde sind Rechtecke, und es ist EF = LB, FΓ = BP.

Auch die vier Seitenflächen EQ, EK, TQ, TK des Parallelepipedi EW schliessen eine prismatische Fläche ein, wozu ET, DW, als Grundflächen gehören. Diese prismatische Fläche sey über ET hinaus erweitert, so kann man sie diesseits ET mit einer Ebene schneiden, die den Grundflächen ET, DW, parallel liegt: alsdenn ist die Durchschnittsfigur HYZM den Grundflächen ET, DW, gleich und ähnlich, und man erhält das dritte Parallelepipedum HT, dessen Grundfläche ET der Seitenfläche LP des Parallelepipedi AP gleich und ähnlich ist. Wird nun diese Seitenfläche LP für die Grundfläche des Parallelepipedi AP angenommen, so ist ihre Entfernung von der gegenüberstehenden Seitenfläche AV die dazu gehörige Höhe. Die Ebene HYZM sey

von

von der Grundfläche ESTF eben soweit entfernt: so ist das Ppp. HT = Ppp. AP (340 §), auch ist die Seitenfläche HF = AB, weil EF = LB war, und beyde Parallelogramme gleich hoch sind (105 §). Ueberdem ist AB = CD angenommen, also hat man HF = CD.

Vermöge des 339 § hat man ferner Ppp. CQ: Ppp. EW = CD: EK, und Ppp. EW: Ppp. HT = EK: HF, also Ppp. CQ: Ppp. HT = CD: HF (185 §). Weil ferner CD = HF ist, so ist auch Ppp. CQ = Ppp. HT. Es war aber Ppp. HT = Ppp. AP, also auch Ppp. CQ = Ppp. AP.

342 §.

Jede zwey Parallelepipeda auf gleichen, obgleich unähnlichen Grundflächen, in gleichen Höhen, sind gleich groß.

Beweis. Wenn beyde Parallelepipeda grade sind, so ist der Satz schon im vor. §. bewiesen. Ist eines schief, so setze man auf eben der Grundfläche ein grades in gleicher Höhe: dies ist dem schiefen, und dem andern graden, folglich auch dies letzte dem schiefen Parallelepipedo gleich. Sind alle beyde schief; so setze man auf eines jeden Grundfläche ein grades in eben der Höhe. Alsdenn sind beyde grade Parallelepipeda gleich (341 §), auch ist jedes grade dem dazu gehörigen schiefen gleich (340 §), also sind auch beyde schiefe Parallelepipeda gleich groß.

343 §.

Die Diagonalfläche *ABCD* theilt jedes Pa- 156
rallelepipedum *HS* in zwey gleich grosse drey- F.
seitige Prismen.

Beweis. Man halbire die Diagonallinien AD, BC, beyder Grundflächen in E und F, so ist EF mit

den Seitenlinien und Seitenflächen des Parallelepipedi parallel, und man kann durch EF ein Paar Ebenen OQ, NP, mit den Seitenflächen des Parallelepipedi parallel legen. Diese theilen es in vier gleich grosse Parallelepipeda NO, QP, FR, EG, und die beyden ersten werden wiederum durch die Diagonalfläche in zwey dreyseitige Prismen getheilt. Mit diesen beyden Parallelepipeden NO, QP, gehe man eben so, wie mit dem ersten um, so erhält man abermahl in jedem von ihnen vier gleich grosse Parallelepipeda, wovon ihrer zwey BK, IE, und FM, LD, aufs neue durch dieselbe Diagonalfläche in zwey dreyseitige Prismen getheilt werden. Von den übrigen Parallelepipeden, durch welche die Diagonalfläche nicht durchgehet, ist die eine Hälfte im Prisma ABGCDS, die andre Hälfte im Prisma ABHCDR beschrieben. Jedesmahl, wenn man alle Parallelepipeda, durch welche die Diagonalfläche ABCD durchgehet, und welche ich die mittlern nennen will, eben so, wie das erste theilt, geht von ihrer Summe die Hälfte ab: also kann die Summe dieser mittlern Parallelepipeden kleiner werden, als jeder gegebene geometrische Körper (139 §. Rechenk.).

Es sey das Prisma ABGCDS $= P$, das andre ABHCDR $= p$, die Summe der in jedem dieser Prismen beschriebenen Parallelepipeden $= S$, die Summe der mittlern $= s$, das ganze Parallelepipedum GR $= \Pi$, so ist $\Pi = 2S + s = P + p$. Wäre nun $P > p$, so sey $P - p = d$, also $P = p + d$, und $P + p = 2p + d$. Man setze die Theilung der mittlern Parallelepipeden so lange fort, bis $s < d$ wird. Alsdann hat man $2S + s < 2S + d$, also $P + p < 2S + d$, folglich auch

auch $2p+d < 2S+d$. Demnach wäre $p < S$, welches nicht seyn kann.

Wäre $p > P$, so sey $p-P=d$, also $p=P+d$, und $P+p=2P+d$. Die Theilung der mittlern Parallelepipeden sey soweit fortgesetzt, daß $s < d$ ist, so hat man $2S+s < 2S+d$ also $P+p < 2S+d$, mithin ferner $2P+d < 2S+d$. Daraus folgt $P < S$, welches wiederum nicht bestehen kann. Weil nun weder $P > p$ noch $P < p$ seyn konnte; so ist nothwendig $P=p$.

1) Jedes dreyseitige Prisma $ABGCDS=P$ 156
ist demnach die Hälfte eines Parallelepipedi, F.
das mit demselben eine gleiche Höhe, und eine doppelt so grosse Grundfläche hat. Durch die Seitenlinien AB, CD, lege man Ebenen BR, CR, mit den Seitenflächen GD, GA, parallel, welche die Ebenen der Grundflächen in AR, DR, BH, CH, schneiden: so erhält man ein Parallelepipedum GR $=\Pi=2P$, (vermöge des eben bewiesenen Satzes) dessen Grundfläche AGCH doppelt so groß ist, als des Prisma P Grundfläche BGC. Aber jedes andre Parallelepipedum Q, dessen Höhe eben so groß, und dessen Grundfläche $=$ AGCH ist, hat eben die Grösse: demnach ist auch $Q=2P$, oder $P=\frac{1}{2}Q$.

2) Demnach sind dreyseitige Prismen gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben.

344 §.

Zwey Parallelepipeda P und p von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen B und b.

Beweis. Man nehme zuerst ein Paar rechtwink- 157
lichte Parallelepipeda AC, und DF, deren Grund- F.
flächen AB und DE, ihre gleich grossen Höhen BC

und EF sind. Man verlängere die eine Seitenlinie AG der Grundfläche AB nach H, und setze an GB ein rechtwinklichtes Parallelogramm BGHI, welches so groß ist, als DE (248 §.). Weil nun HI mit GC und AN parallel ist (311 §.), so lege man durch HI eine Ebene HK mit GC parallel, welche die Seitenflächen AM in HL, BN in IK, und die Ebene der Grundflächen MN zwischen den Parallellinien OM, CN, in KL schneidet, so erhält man ein Parallelepipedum GK = DF. Es ist aber Ppp. AC: Ppp. GK = AB: GI (339 §.), also auch Ppp. AC: Ppp. DF = AB: DE.

Anstatt jeder zweyer andrer Parallelepipeden P und *p*, deren Grundflächen B und *b* sind, und deren gleiche Höhe A ist, kann man ein Paar rechtwinklichte AC, DF verzeichnen, deren Höhe BC = EF = A, und des einen Grundfläche AB = B, des andern Grundfläche DE = *b* ist: (342 §.) sodann ist AC = P, und DF = *p*, folglich auch P: *p* = B: *b*.

Demnach verhalten sich auch dreyseitige Prismen wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind (343 und 181 §.).

Auch ist jedes dreyseitige Prisma einem Parallelepipedo gleich, das mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

345 §.

158 F. Jedes vielseitige Prisma *BGKE* verhält sich zum dreyseitigen *LMNOPQ* von gleicher Höhe, wie des ersten Grundfläche zur Grundfläche des letztern.

Beweis. Man theile die Grundflächen ABCDE, FGHIK durch gleichnahmige Diagonallinien AC und FH, AD und FI, u. s. f. in Dreyecke; so sind jede

zwo

zwo gleichnahmige Diagonallinien einander parallel, (96 §.) und die Diagonalflächen ACHF, ADIF u. s. f. theilen das ganze Prisma in so viel dreyseitige von eben der Höhe, in so viel Dreyecke die Grundflächen getheilt sind. Nun setze man der Kürze wegen das dreyseitige Prisma LMNOPQ $= \pi$, seine Grundfläche LMN $= \beta$. Man setze ferner die Dreyecke ABC $= a$, ACD $= b$, ADE $= c$, und bezeichne die zu diesen Grundflächen gehörigen Prismen mit P, Q, R: so hat man aus dem (344 §.) $P : \pi = a : \beta$, $Q : \pi = b : \beta$. $R : n = c : \beta$, u. s. f. also $P + Q + R : \pi = a + b + c : \beta$ (197 §.), oder Pr. BGKE : Pr. π = ABCDE : β.

Demnach ist ein vielseitiges Prisma einem dreyseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat: und eben deswegen sind alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, gleich groß. Auch verhalten sich überhaupt ein Paar Prismen, wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind (344 §.).

346 §.

Zwey Prismen verhalten sich wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind.

Beweis. Man vergleiche zuerst ein Paar rechtwinklichte Parallelepipeda AC, DF, die auf gleichen F. 159
und ähnlichen Grundflächen AB, DE, stehen so, daß AG = DH, und GB = HE sey. Die Höhe des ersten sey BC, die Höhe des andern EF. Nimmt man nun die Seitenflächen GC und HF als die Grundflächen an; so sind die Höhen AG und DH gleich, und man hat Ppp. AC : Ppp. DF = GC : FH (345 §.). Es ist aber GC : FH = BC : EF (245 §.), also Ppp. AC : Ppp. DF = BC : EF. Wenn nun überhaupt

ein Prisma P die Höhe A, ein andres p die Höhe a hat, und beyder Grundflächen gleich sind: so kann man allemahl ein Paar gleiche und ähnliche Rechtecke AB, DE zeichnen, die so groß, als jene Grundflächen sind (110 §.). Setzt man nun auf AB ein rechtwinklichtes Parallelep. AC in der Höhe BC = A, auf DE ein andres DF in der Höhe EF = a: so ist AC = P, und DF = p (345 §.), folglich auch P : p = A : a.

347 §.

Das Verhältniß zweyer Prismen ist aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt.

Beweis. Des einen Prisma P Grundfläche sey B, und Höhe A, des andern p Grundfläche b, und Höhe a: so kann man mit beyden ein drittes Prisma π vergleichen, dessen Grundfläche b, und Höhe A ist. Nun hat man

$$P : \pi = B : b \text{ (345 §.)}.$$
$$\pi : p = A : a \text{ (346 §.)}.$$

$$\text{Also ist } P : p = \begin{pmatrix} B : b \\ A : a \end{pmatrix} \text{ (232 §.)}.$$

Hat man statt P und p ein Paar Würfel C, c und ist L des ersten, l des zweyten Seitenlinie: so ist des ersten Höhe L, des zweyten l, also hat man $C : c = \begin{pmatrix} B : b \\ L : l \end{pmatrix}$.

Aber B und b sind Quadrate, und L, l ihre Seiten: also ist $B : b = \begin{pmatrix} L : l \\ L : l \end{pmatrix}$ (247 §.), folglich

$$\text{wird } C : c = \begin{pmatrix} L : l \\ L : l \\ L : l \end{pmatrix},$$

oder

oder das Verhältniß zweener Würfel ist dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Seiten (ratio triplicata laterum).

348 §.

Weil $\binom{B:b}{A:a} = B \times A : b \times a$ (243 §.); so ist auch $P : p = B \times A : b \times a$, oder zwey Prismen verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Dafern nun $B:b = a:A$; so ist $B \times A = b \times a$ (199 §.). Wenn also die Grundflächen sich umgekehrt, wie die Höhen verhalten; so sind die Prismen gleich. Auch umgekehrt: wenn zwey Prismen gleich sind; so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen.

349 §.

Den körperlichen Inhalt eines Prisma auszurechnen, wenn der Inhalt der Grundfläche *B* im Quadratmaaß und die Höhe *A* im Längenmaaß, das mit jenem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, gegeben sind.

Aufl. Man muß einen andern Körper von bekannter Grösse für das Maaß annehmen, und prüfen, wievielmahl derselbe entweder ganz, oder ein aliquoter Theil von ihm in dem Prisma P enthalten sey. Hiezu erwählet man einen Würfel C, dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 261 §. erklärten Maassen, z. E ein Fuß, eine Ruthe, u. s. f. Der Würfel C erhält den Nahmen von diesem Längenmaasse, dem die Seite desselben gleich genommen wird. Er heißt eine Cubicruthe, ein Cubicfuß, u. s. f. nachdem seine Seite eine Ruthe, einen Fuß lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundfläche des

Prisma in Zahlen nach einem solchen Quadratmaaß gegeben ist, das mit dem Längenmaaß, dem die Seite L des Würfels gleich ist, einerley Nahmen hat; so ist des Würfels Grundfläche $= L.L$, und

$$C:P = L.L \times L:B \times A \text{ (348 §.)},$$

oder $C:P = 1^3:B \times A$, weil $L = 1$ ist.

Also ist der Würfel C im Prisma P so vielmahl enthalten, als Eins in dem Product $B \times A$ enthalten ist, und man findet den körperlichen Inhalt des Prisma im Cubicmaaß, das mit dem Quadratmaaß, wodurch der Inhalt der Grundfläche ausgedrückt ist, einerley Nahmen hat, wenn man den Quadratinhalt der Grundfläche mit einer Zahl multiplicirt, welche die Höhe des Prisma im Längenmaaß von eben dem Nahmen ausdrückt.

Es sey $B = 582{,}374$ Q. R.

$A = 6{,}253$ R.

1747122

2911870

1164748

3494244

---

so wird $P = 3641{,}584622$ Cub. R.

350 §.

Die Würfel selbst sind Prismen, und wenn eines Würfels Seite durch die Zahl λ ausgedrückt ist; so ist seine Grundfläche $= \lambda . \lambda$ (277 §.), seine Höhe $= \lambda$, also sein Inhalt $= \lambda\lambda\lambda = \lambda^3$. Wenn man demnach ein Product dreyer Factoren macht, wovon jeder die Seite des Würfels ausdrückt: so ergiebt dies Product, wie vielmahl ein Würfel, dessen Seite $= 1$ ist, in dem gegebenen enthalten sey. Dies ist

der

der Ursprung des Namens einer Cubiczahl (180 §. Rechenk.).

Eine Cubicruthe enthält also 1000 Cubicfuß, ein Cubicfuß 1000 Cubiczoll, ein Cubiczoll 1000 Cubiclinien, u. s. f. wenn beym Längenmaasse die Decimal-Abtheilung ist gebraucht worden. Hiedurch werden zugleich die Nahmen solcher Decimaltheile bestimmt, die an einer Zahl hängen, welche den Inhalt eines Körpers ausdrückt. Im vorigen §. fand man das Parallelepipedum P = 3641,584622 Cub. R. und nach dem 147 §. der Rech. sind 0,584622 Cub. R. = 0,584622 × 1000 Cub. F. = 548,622 Cub. F., und 0,622 Cub. F. = 0,622 × 1000 Cub. Zoll = 622 Cub. Z. Also ist P = 3641 Cub. R. 584 Cub. F. 622 Cub. Zoll groß.

Demnach kann man jedesmahl die an einer Zahl von dieser Art hängende Decimal-Zahl von der linken gegen die Rechte in Classen so eintheilen, daß jede Classe 3 Ziffern bekommt, da man denn in der letzten eine, oder zwo Nullen zusetzt, wenn nur eine, oder zwo Ziffern in dieselbe kämen. Nun werden diese Classen Cubic-Fuße, Cubic-Zoll, Cubic-Linien u. s. f. nach einander bedeuten, wenn die Einheit eine Cubic-Ruthe ist. Man sieht auch leicht, wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Cubic-Fuß, Cubic-Zoll, u. s. f. ist.

351 §.

Nach dem Duodecimal-Maaß hält eine Cubic-Ruthe 1728 Cubic-Fuß, ein Cubic-Fuß 1728 Cubic-Zoll ein Cubic-Zoll 1728 Cubic-Linien, und in der Cubic-Linie sind 1728 Cubic-Scrupel enthalten: also kann man leicht Decimal-Cubic-Maaß auf Duodecimal-Cubic-Maaß, und umgekehrt, dieses

auf

auf jenes bringen, wenn man folgende Sätze als Reductionssätze merket. Bey einerley Ruthenmaaß sind 1000 Dec. C. F. = 1728 Duod. C. F. bey einerley Fuß-Maaß aber 1000 Dec. C. Zoll = 1728 Duod. C. Zoll. Frägt man: 584 Cub. F. 622 Cub. Zoll, wie viel sind es Cubic-Fuß und Cubic-Zoll nach der Duodecimal-Abtheilung? vorausgesetzt, daß die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley sey; so ist der Ansatz

1000 Dc. Cf. — 1728 Du. Cf. — 584 Cf. 622 Cz. Dc. M.

× 1000 × 1000

1000000 584622

also das Facit = $\frac{584622}{1000000}$ 1728 = 0,584622 × 1728 Duodec. Cubic-Fuß = 1010,226816 Duod. Cub. F. Man erhält auf eben die Art 0,226816 Duod. C. F. = 0,226816 × 1728 Duod. Cub. Z. = 391,938028 Duod. Cubic-Zoll, u. s. f.

352 §.

152 F. Wenn eine Ebene die Pyramide *ABCDEF* mit der Grundfläche parallel schneider: so ist die Durchschnitts-Figur *GHIKL* der Grund-Fläche ähnlich, das Verhältniß der gleichnahmigen Seitenlinien dieser Figuren ist gleich dem Verhältnisse der Entfernungen ihrer Ebenen von der Spitze der Pyramide, und die Flächen-Räume beyder Figuren verhalten sich wie die Quadrate dieser Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

Beweis. Die Durchschnitts-Figur hat so viele Seiten-Linien als die Grundfläche, weil durch jede Seitenlinie der Grundfläche eine Seitenfläche geht, deren Durchschnitt mit der schneidenden Ebene eine

Seiten-

Seitenlinie der Durchschnitts-Figur wird. Ueberdem ist jeder Winkel in der Durchschnitts-Figur so groß, als der ihm zugehörige Winkel in der Grundfläche, dessen Spitze nemlich mit jenes Spitze in einer Seitenlinie der Pyramide liegt. Denn es ist BF mit GL, und BC mit GH parallel (323 §), also FBC = LGH (312 §). Auf ähnliche Art erhellet, daß auch BCD = GHI, CDE = HIK sey, u. s. f. Ferner sind die gleichnahmigen Seiten beyder Figuren einander proportional. Es ist nemlich BF : GL = AB : AG, und BC : GH = AB : AG (210 §), also auch BF : GL = BC : GH. Aus einem ähnlichen Grunde folgt, daß auch BC : GH = CD : HI = DE : IK sey, u. s. f.

Also ist BCDEF : GHIKL = BF*q* : GL*q* (251 §). Es sey AN eine lothrechte Linie von A auf die Grundfläche, welche die Durchschnitts-Figur in M trift: so ist auch AM auf die Durchschnits-Figur senkrecht, und die Linien BN, GM sind parallel (323 §), mithin ist AN : AM = AB : AG (210 §), = BF : GL. Demnach ist ferner BF*q* : GL*q* = AN*q* : AM*q*, also verhalten sich die beyden Figuren BCDEF, GHIKL wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

353 §.

Jede dreyseitige Pyramide *ABCD* läßt sich in zwey Prismen und zwo Pyramiden eintheilen, wovon die beyden Prismen zusammen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide betragen. 160 F.

Beweis. Man theile zuerst die drey Seiten-Linien AB, AC, AD bey E, F, G in zweene gleiche Theile; so schneidet die Ebene EFG eine Pyramide AEFG ab. Alsdenn ist EF mit BC, FG mit CD parallel (204 §), also ist die Ebene EFG mit BCD

parallel

parallel (324 §), und EFG ~ BCD (352 §). Man theile auch BC, CD, BD bey H, I, K in zweene gleiche Theile, und ziehe FH, HI, FI: so wird FHCI die zwote Pyramide, und ihre Grundfläche HCI = und ~ EFG. Denn es ist FI mit AD parallel, und FG mit DI, also auch DI = FG = CI. Ueberdem sind die Winkel HCI = EFG, und HIC = BDC = EGF: also passen die Dreyecke HCI und EFG auf einander. Ferner sind die Seitenflächen AEG, FHI, eben so AEF, FHC, und AFG, FCI, gegen die Grundflächen EFG, CHI unter gleichen Winkeln geneigt (329 §): also sind beyde Pyramiden AEFG, und FHCI gleich groß (338 §).

Weiter ziehe man GK und HK, so sind GK und FH mit EB parallel (204 §): also ist EFGBHK ein Prisma (331 §). Ueberdem sind FG und HK mit DI parallel (204 §), und die Ebene FHI ist mit GKD parallel; also auch FHIGKD ein Prisma (331 §), dessen Grundflächen die Dreyecke FHI, GKD sind. Man verzeichne die Parallelepipeda OF, KM, wie im 343 §: so liegt FGLM in der Ebene EFG, und die Parallelepipeda OF, KM, sind gleich hoch. Da nun HKDI = 2BHK (106 §) = OBHK: so sind auch ihre Grundflächen, und dieserwegen beyde Parallelepipeda OF, KM, folglich ihre Hälften, die Prismen EFGBHK, FHIGKD gleich groß.

Man ziehe noch EH und EK: so erhellet leicht, daß die Pyramide EBHK = AEFG mithin auch EBHK = FHCI sey (338 §). Weil ferner EFGBHK > EBHK; so ist auch FHIGKD > FHCI. Demnach betragen beyde Prismen zusammen mehr, als beyde Pyramiden zusammen, und beyde Prismen betragen mehr, als die Hälfte der ganzen Pyramide ABCD.

354 §.

Man kann jede der Pyramiden AEFG, und FHCI eben so wieder eintheilen, wie vorhin die ganze ABCD eingetheilt ward, und es auf solche Art dahin bringen, daß die Summe aller Prismen, die man in der Pyramide ABCD hervorbringt, grösser wird, als jeder Körper, der kleiner ist, als die Pyramide ABCD. Es sey nemlich Z ein solcher Körper, und seine Differenz von der Pyramide ABCD sey D: so ist Z+D ≡ABCD. Wenn nun P die Summe der Prismen ist, und ∂ ihr Unterschied von der Pyramide ABCD: so ist auch P+∂=ABCD, und P+∂=Z+D. Aber bey jeder neuen Eintheilung geht von ∂ mehr, als die Hälfte ab, demnach muß einmahl ∂ < D werden, und in diesem Fall ist P > Z.

355 §.

Wenn man auf der Ebene *bcd* als der Grund- 161
fläche eine andre dreyseitige eben so hohe Pyramide F. *abcd* setzt, so kann man diese eben so, wie ABCD in zwey Prismen *efgbhk*, *fhigkd*, und zwo Pyramiden *aefg*, *fhci* eintheilen. Alsdenn sind die Ebenen *efg*, *bcd*, und EFG, BCD gleich weit von einander entfernt, und die Prismen EFGBHK, *efgbhk* gleich hoch: denn ein Paar grade Linien aus A und *a* auf BCD und *bcd* lothrecht herab gelassen werden von den Ebenen EFG, *efg*, in dem Verhältniß AE:EB=*ae*:*eb* getheilt, wie sogleich aus dem 228 § erhellet, wenn man sich noch durch A und *a* ein Paar mit den Grundflächen parallele Ebenen vorstellet. Demnach sind auch AEFG, *aefg* und FHCI, *fhci*, gleich hohe Pyramiden. Ferner ist BCD=4BHK und *bcd*=4*bhk* (247 §), also BHK:*bhk*=BCD:*bcd*. Aber EFGBHK:

efgbhk

efgbhk = BHK : *bhk* (345 §), also EFGBHK : *efgbhk* = BCD : *bcd*.

Man setze Kürze halber das erste dieser Prismen = P, das zweyte = *p*, so ist auch 2P : 2*p* = BCD : *bcd*, oder die Summe der ersten beyden Prismen in ABCD verhält sich zur Summe der ersten durch eben die Theilung entstandenen Prismen in *abcd*, wie BCD : *bcd*.

Theilt man die gleich hohen Pyramiden AEFG und *aefg* eben so ein: so erhellet, daß auch beyde Prismen in AEFG zu beyden Prismen in *aefg* sich verhalten, wie EFG : *efg* = BCD : *bcd*, und dies gilt auch von den Prismen, die man durch eben die Eintheilung in FHCI und *fhci* hervorbringt. Also verhalten sich noch alle sechs Prismen in ABCD zu den ähnlichen sechs Prismen in *abcd*, wie BCD zu *bcd*. Man sieht leicht, daß dies Verhältniß zwischen den beyden Summen der Prismen in beyden Figuren allemahl bleibe, wie oft auch die Eintheilung ist wiederholt worden.

356 §.

160 Zwo dreyseitige Pyramiden *abcd*, *ABCD*
161 die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre F. Grundflächen *bcd*, *BCD*.

Beweis. Man lege die Grundflächen *bcd* und BCD in einer Ebene so, daß die Spitzen A und *a* auf einer Seite dieser Ebene fallen. Es sey nun *bcd* : BCD = *abcd* : Z, und Z sey ein Körper, der kleiner als ABCD ist: so kann man ABCD nach dem (354 §) in so viele Prismen eintheilen, daß ihre Summe P > Z ist. Dies sey geschehen, und die Pyramide *abcd* sey nach dem 355 § in eben so viele Prismen eingetheilt, deren Summe man durch *p* bezeichne, alsdenn hat man *p* : P = *bcd* : BCD (355 §). Weil ferner

ner *bcd*:BCD=*abcd*:Z seyn soll; so folgt, es sey *p*: P=*abcd*:Z. Ueberdem ist P > Z: also müßte *p* > *abcd* seyn, welches falsch ist. Demnach kann die vierte Proportionalgrösse zu *bcd*, BCD, *abcd*, nicht kleiner, als ABCD seyn, folglich kann aus eben dem Grunde auch die vierte Proportionalgrösse zu BCD, *bcd*, und ABCD nicht kleiner seyn, als *abcd*.

Wäre Z > ABCD, und die Proportion *bcd*:BCD =*abcd*:Z sollte richtig seyn; so wäre auch umgekehrt Z:*abcd*=BCD:*bcd*. Es sey ferner Z.:*abcd*= ABCD: Y, so muß Y < *abcd* seyn, weil ABCD < Z ist. Aber aus beyden Proportionen folgt BCD:*bcd*= ABCD:Y, und diese Proportion kann nicht bestehen, weil Y kleiner, als *abcd* ist, wie eben erwiesen worden.

Demnach kann in der Proportion *bcd*:BCD=*abcd*: Z der Körper Z weder kleiner, noch grösser, als ABCD seyn: also ist *bcd*:BCD=*abcd*:ABCD.

Diesemnach sind dreyseitige Pyramiden gleich groß, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

357 §.

Eine vielseitige Pyramide *ABCDEF*, verhält sich zur dreyseitigen *GHIK* von gleicher F. Höhe, wie der ersten Grundfläche *BCDEF* zur Grundfläche der zweyten *HIK*. 162

Beweis. Man theile die Grundfläche BCDEF durch Diagonallinien BD, BE u. s. f. in Dreyecke: so sind ABCD, ABDE, ABEF ebenfalls dreyseitige Pyramiden von eben der Höhe. Diese bezeichne man der Kürze wegen mit P, Q, R und ihre Grundflächen mit *a*, *b*, *c*; überdem sey GHIK=π, die Grundfläche HIK=β: so ist P:π=*a*:β, Q:π=*b*:β, R:π=*c*:β u. s. f. (356 §), folglich P+Q+R: π=*a*+*b*+*c*:β (197 §), oder ABCDEF:GHIK= BCDEF

BCDEF : HIK. Es erhellet leicht, daß der Beweis einerley bleibe, die Pyramide ABCDEF mag so viele Seitenflächen haben, als sie wolle.

Jede vielseitige Pyramide ist also einer dreyseitigen gleich, die mit ihr eine gleiche Grundfläche und Höhe hat; und hieraus folgt, daß alle Pyramiden gleich groß sind, die gleiche Grundflächen, und Höhen haben. Auch ist das Verhältniß gleich hoher Pyramiden dem Verhältniß ihrer Grundflächen gleich.

358 §.

Jedes Prisma ist dreymahl so groß als eine Pyramide, die mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

163 F. Beweis. Es sey ABCDEF ein grades dreyseitiges Prisma, dessen Grundflächen ABC, und DEF sind. In der Seitenfläche ABED ziehe man die Diagonallinie BD, und in der Seitenfläche ACFD die Diagonallinie CD: so schneidet die Ebene BCD vom Prisma eine Pyramide ABCD ab, die mit dem Prisma eben die Grundfläche ABC, und Höhe AD hat. Man ziehe auch in der Seitenfläche BCFE die Diagonallinie CE: so schneidet die Ebene CDE noch eine Pyramide CDEF ab, die mit dem Prisma einerley Grundfläche DEF = ABC, und Höhe CF = AD hat. Also ist ABCD = CDEF. Das noch übrige Stück BEDC ist gleichfalls eine dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche BED = ABD. Weil nun ABD auch eine Grundfläche der Pyramide ABCD ist (337 §) und der beyden letztgenannten Pyramiden ABDC, und BEDC Spitzen in C zusammen, ihre Grundflächen aber in einer Ebene fallen: so haben sie gleiche Höhen. Demnach ist ABCD = BEDC, folg-

folglich auch CDEF = BEDC, und das Prisma ABCDEF = 3 Pyr. ABCD.

Ist nun eines jeden andern Prisma P Grundfläche B, und Höhe A, und hat eine Pyramide π eben die Grundfläche und Höhe: so kann man ein Dreyeck ABC = B verzeichnen, und ein dreyseitiges grades Prisma ABCDEF in der Höhe AD = A darauf setzen. Zieht man hiernächst BD und CD: so ist ABCD = π (356 §.), und 3ABCD = 3π. Da nun ABCDEF = 3ABCD ist, so ist ABCDEF = 3π. Aber auch P = ABCDEF (345 §.), also P = 3π.

359 §.

Diesemnach verhalten sich zwo Pyramiden, wie die Prismen, so mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, und ihr Verhältniß ist aus dem Verhältniß der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt. Wenn demnach die Grundflächen gleich sind; so verhalten sie sich wie die Höhen.

Steht eine Pyramide auf der Grundfläche B in der Höhe A; so ist eine andre Pyramide auf eben der Grundfläche in der Höhe 3A dreymahl so groß. Eben so groß ist ein Prisma auf der Grundfläche B in der Höhe A: also ist ein Prisma einer Pyramide gleich, die eine eben so grosse Grundfläche, und dreymahl so grosse Höhe hat.

Haben zwo Pyramiden P und π die Grundflächen B, β, und Höhen A, α; so ist auch P : π = A × B : α × β (348 §.). Sind also die Prismen gleich; so sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional; umgekehrt: wenn B : β = α : A ist, so folgt daraus P = π.

360 §.

Den Inhalt einer Pyramide π auszurechnen, wenn der Quadrat-Inhalt ihrer Grundfläche *B* nebst der Höhe *A* gegeben ist.

Aufl. Ein Prisma P auf eben der Grundfläche und Höhe wäre = B × A (349 §.), und es ist π = $\frac{1}{3}$P (358 §.), also wird π = $\frac{1}{3}$B × A, oder der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe, giebt den körperlichen Inhalt der Pyramide. Wenn

B = 7983,5246 Quad. Fuß
A = 512,3 Fuß

2395,05738
15967,0492
79835,246
3991762,30

so ist P = 4089959,65258 Cub. Fuß
und π = 1363319,884193 Cub. Fuß.

Der XIV. Abschnitt.
Vom Cylinder und Kegel.

361 §.

Wenn eine grade Linie CD durch des Kreises AB Mittelpunct C gehet, und gegen seine Ebene unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, wenn ferner durch des Kreises Umfang eine krumme Oberfläche gehet, die so beschaffen ist, daß jede durch einen Punct E im Umfang des Kreises mit CD parallel gezogene grade Linie EF ganz in diese Oberfläche fällt;

fällt; so heißt diese krumme Fläche eine Cylinderfläche. Wird diese krumme Fläche noch mit einer andern Ebene GI der Fläche des Kreises AB parallel geschnitten; so schliessen beyde Ebenen mit der krummen Fläche zusammen einen Körper ABGI ein, den man einen Cylinder, eine Walze, oder eine Rundsäule nennt. Die beyden ebenen Figuren AB, DI, heissen seine Grundflächen, und CD seine Axe. Die Entfernung der Grundflächen von einander heißt des Cylinders Höhe.

362 §.

Beyde Grundflächen des Cylinders sind gleich grosse Kreise, und die Axe geht durch F. beyder Mittelpunct. 164

Beweis. Vermöge der gegebenen Erklärung ist die eine Grundfläche AB ein Kreis, durch dessen Mittelpunct C die Axe geht, welche die Ebene der andern Grundfläche in D trift. Wenn nun AG durch A mit CD parallel gezogen ist; so schneidet AG auch die Ebene GI, und dieser Durchschnittspunct liegt in dem Umfang der Durchschnittsfigur. Ferner ist DG mit AC parallel (323 §.), also DG = AC. Wenn überdem durch jeden andern Punct E im Umfang des Kreises AB die grade Linie EH mit CD parallel gezogen ist, welche den Umfang der Durchschnittsfigur in H trift; so ist auch DH = CE, vermöge des erwiesenen, folglich DG = DH, weil AC = CE ist. Also sind alle Puncte des Umfangs GHI von D gleichweit entfernt, die Figur GHI ist ein Kreis, dessen Mittelpunct D, und Halbmesser = AC ist, folglich sind beyde Grundflächen gleiche Kreise.

Jeder Schnitt einer mit den Grundflächen parallelen Ebene giebt also ebenfalls einen Kreis, dessen Mittelpunct im Durchschnittspunct mit der Axe fällt.

363 §.

Wenn eine Ebene durch die Axe des Cylinders gehet; so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm AGIB: denn AB, und GI sind parallel, und die graden Linien, welche durch A und B mit CD parallel laufen, fallen zugleich in die Ebene ADB und in des Cylinders Oberfläche, also sind es die Durchschnittslinien mit der Oberfläche.

364 §.

Ein senkrechter oder grader Cylinder ist, dessen Axe CD auf den Grundflächen senkrecht steht, ein schiefer Cylinder aber, dessen Axe gegen die Grundflächen unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

Der Schnitt durch die Axe des senkrechten Cylinders ist ein Rechteck AGIB, dessen Grundlinie AB dem Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe AG der Höhe des Cylinders gleich ist. Es ist oft bequem, blos diesen Schnitt durch die Axe anstatt des Cylinders zu zeichnen, weil man sich den zugehörigen Cylinder leicht mit vorstellen kann. Gemeiniglich stellt man sich die Sache so vor: der Cylinder entstehe, wenn man das Rechteck AGIB um die Mittellinie CD so weit herum drehet, bis AG in BI, und BI in AG kommt. Man sieht leicht, daß AG bey diesem Herumdrehen durch die eine Hälfte, und BI durch die andre Hälfte der Cylindrischen Oberfläche fortgehen, die Ebene ACDG aber in der einen, und DCBI in der andern Hälfte des Cylindrischen Raums herumgehen würde. Es ist blos ein Hülfsmittel für die Einbildungskraft, wenn man sich da

einen

einen Cylinder vorstellen soll, wo nur ein Rechteck als ein Schnitt durch die Axe gezeichnet ist.

365 §.

Wenn eine grade Linie AC die Ebene eines Krei- 165
ses BD im Mittelpunct C unter einem beliebigen F.
Winkel schneidet, wenn sich ferner durch einem Punct A der Linie AC, und alle Puncte im Umfang des Kreises BD eine krumme Oberfläche von der Beschaffenheit erstreckt, daß jede durch A und einen Punct E im Umfang dieses Kreises gezogene grade Linie AE ganz in diese Oberfläche fällt: so schließt diese krumme Fläche mit der Kreisfläche BD einen Körper ein, der ein Kegel (conus) genannt wird. Die Linie AC heißt seine Axe, BD seine Grundfläche, A seine Spitze, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, seine Höhe. Die Seite des Kegels heißt jede grade Linie, wie AE, auf der Oberfläche desselben zwischen seiner Spitze und einem Punct E im Umfang der Grundfläche.

Schneidet man also den Kegel durch seine Axe; so ist die Durchschnittsfigur ABD ein Dreyeck, dessen Grundlinie BD der Durchmesser der Grundfläche, und dessen zwo übrige Seiten ein Paar entgegengesetzte Seitenlinien des Kegels sind.

366 §.

Ein grader Kegel ist, dessen Axe auf des Kegels Grundfläche senkrecht stehet, ein schiefer Kegel aber, dessen Axe gegen die Grundfläche unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

Alle Seitenlinien eines senkrechten Kegels sind 165
also gleich groß, und der Schnitt durch seine Axe F.
giebt ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD, welches

ebenfalls zuweilen allein gezeichnet wird, wenn die Zeichnung eigentlich einen Kegel vorstellen soll. Man macht sich hier die Vorstellung, der senkrechte Kegel entstehe, indem das gleichschenklichte Dreyeck ABD sich um die Mittellinie AC so weit drehet, bis AB in AD, und AD wieder in AB fällt. Es fällt leicht in die Augen, daß auf solche Art AB durch die eine, und AD durch die andre Hälfte der Conischen Oberfläche, das Dreyeck ACB aber durch die eine, und ACD durch die andre Hälfte des inwendigen Conischen Raums geführet werde.

367 §.

165 Wenn man den Kegel *ABD* mit einer Ebe-
F. ne *FI* der Grundfläche *BD* parallel schneider; so wird die Durchschnittsfigur *FI* ein Kreis, dessen Mittelpunct in den Durchschnitt mit der Axe fällt. Die Halbmesser dieser Kreise verhalten sich wie ihre Entfernungen, und die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

Beweis. Man schneide den Kegel auch durch die Axe: so sind die Durchschnitte BC, FG einander parallel (323 §.), und es ist AC : AG = BC : FG. Wenn also der Grundfläche Halbmesser BC = *r* gesetzt wird; so ist $GF = \frac{r \times AG}{AC}$ allemahl von einer Grösse, wo auch F im Umfange der Durchschnittsfigur genommen wird. Demnach ist FI ein Kreis, und G ist sein Mittelpunct.

Aus dem 255 §. weiß man, es sey der Kreis FI: Kreis BD = $FG^q : BC^q$, also ist auch der Kreis FI : Kreise BD = $AG^q : AC^q$. Wenn aber AL

auf

auf der Grundfläche senkrecht ist, und die Ebene der Durchschnittsfigur in K trift; so ist AG : AC = AK : AL, also AGq : ACq = AKq : ALq. Demnach ist auch der Kr. FI : Kr. BD = AKq : ALq, oder die Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

368 §.

Wenn ein Prisma P, und ein Cylinder C 166
gleiche Höhen haben; so verhalten sich beyde 167
Körper gegeneinander, wie ihre Grundflä- F.
chen.

Beweis. Es sey B des Prisma P, und K des Cylinders C Grundfläche. Man nehme an, es sey F : C = B : Z, und Z ◁ K: so kann man im Kreise 166
K ein reguläres Polygon ABCDE verzeichnen, wel- F.
ches grösser als Z ist.

Es sey dies geschehen, und man ziehe durch alle Winkelpuncte desselben A, B, u. s. f. mit des Cylinders Axe die Parallelen Aa, Bb, u. s. f., die mit der Ebene der entgegengesetzten Grundfläche, in a, b, u. s. f. zusammenstossen: so liegen diese Parallelen alle in des Cylinders Oberfläche, und man erhält im Cylinder ein Prisma, dessen Grundflächen ABCDE, $abcde$ sind. Diese setze man der Kürze wegen = b, und das zugehörige Prisma = p; so ist p : P = b : B (345 §.). Nun ist angenommen, es sey P : C = B : Z; also müßte p : C = b : Z seyn (171 §.). Weil aber b ▷ Z ist; so wäre p ▷ C, welches nicht seyn kann.

Es bleibe die Proportion P : C = B : Z, und es 167
sey Z ▷ K: so kann man um den Kreis K ein regulä- F.
res Polygon beschreiben, welches kleiner, als Z ist.
Dies sey geschehen, und es sey ABCDE dies Poly-

gon, dessen Seitenlinien den Kreis K in den Puncten P, Q, R, S, T, berühren. Durch diese Berührungspuncte ziehe man mit des Cylinders Axe die Parallelen Pp, Qq, u. s. f., und lege durch diese Parallelen, und die zugehörige Seitenlinien AB, BC, u. s. f. der Grundfläche, Ebenen, welche sich in Aa, Bb, Cc, u. s. f. schneiden. Nun liegen Pp, Qq, u. s. f. in des Cylinders Oberfläche, und jede von den Durchschnittslinien, wie Aa, ist mit des Cylinders Axe parallel. Denn Pp, und Tt sind parallel, also ist Pp mit der Ebene $AEea$ parallel (311 §). Demnach können Pp, und Aa nicht zusammenstossen, und weil sie in einer Ebene liegen: so ist Aa mit Pp, folglich mit des Cylinders Axe parallel. Also ist Aa mit allen übrigen Bb, Cc, u. s. f. parallel. Wenn nun a, b, c u. s. f. die Durchschnittspuncte dieser Parallelen mit der andern Grundfläche des Cylinders sind: so erhält man ein Prisma um den Cylinder, dessen Grundflächen ABCDE, $abcde$ sind. Diese setze man $= \beta$, und das zugehörige Prisma $= \pi$: so ist $\pi : P = \beta : B$ (345 §). Aber vermöge der Voraussetzung ist $P : C = B : Z$; also wäre $\pi : C = \beta : Z$ (171 §). Da nun $\beta < Z$ ist; so wäre $\pi < C$, welches nicht seyn kann.

Weil also weder $Z < K$ noch $Z > K$ seyn kann, wenn die angenommene Proportion bestehen soll; so muß $Z = K$ seyn, und es ist $P : C = B : K$.

369 §.

Ein Prisma und Cylinder, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind also gleich grosse Körper, und eben deßwegen sind auch alle Cylinder gleich groß, die gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Das Verhältniß eines Cylinders zum andern, und eines Prisma zum Cylinder, ist aus den beyden Verhält-

hältnissen der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt, also einerley mit dem Verhältniß der Producte der Grundflächen in die Höhen.

Wenn ein Prisma und Cylinder, oder ein Paar Cylinder gleich groß sind; so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen, und aus dem letztern folgt umgekehrt, das erstere.

Ein Cylinder ist dreymahl so groß, als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

370 §.

Den Inhalt eines Cylinders auszurechnen, wenn der Durchmesser δ seiner Grundfläche, und seine Höhe α gegeben sind.

Aufl. Aus dem gegebenen Durchmesser δ suche man den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit der Höhe α des Cylinders: so giebt das Product seinen Inhalt. Denn dies ist der Inhalt eines dem Cylinder gleichen Prisma (369 §).

Es sey $\delta = 73$ F. $\alpha = 48$ F: so ist

die Grundfläche 4185 Q. F. (291 §)

48

33480

16740

also der Cyl. 200880 Cub. F.

371 §.

Wenn eine Pyramide P und ein Kegel C gleich hoch sind; so verhalten sich beyde Körper ebenfalls wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es sey B der Pyramide und K des Kegels Grundfläche, und man setze, es sey $P : C = B : Z$; so kann Z weder kleiner noch grösser als K seyn.

168 F. Ist $Z < K$; so beschreibe man in des Kegels Grundfläche K ein reguläres Polygon BCDEF, welches grösser, als Z ist (147 §), und ziehe AB, AC, AD, u. s. f.: so hat man in dem Kegel eine Pyramide ABCDEF, deren Grundfläche das Polygon BCDEF ist. Dies setze man $= b$, und die Pyramide $= p$: so ist $b > Z$. Es ist aber $p : P = b : B$, und vermöge der Voraussetzung $P : C = B : Z$: also wäre $p : C = b : Z$. Weil aber $b > Z$ ist, so müste $p > C$ seyn, welches nicht seyn kann.

Ist $Z > K$; so beschreibe man um des Kegels Grundfläche ein reguläres Polygon BCDEF, welches kleiner, als Z ist. Man ziehe die graden Linien AB, AC, AD, u. s. f.: so erhält man eine Pyramide ABCDEF, die den Kegel umgiebt, und deren Grundfläche das Polygon BCDEF ist. Es sey diese Pyramide $= \pi$, ihre Grundfläche $= \beta$: so ist $\beta < Z$, und man hat $\pi : P = \beta : B$ (359 §). Da nun $P : C = B : Z$ seyn soll; so würde $\pi : C = \beta : Z$ seyn, und weil $\beta < Z$ ist, auch $\pi < C$ seyn müssen, welches nicht bestehen kann.

Demnach muß $Z = K$, also $P : C = B : K$ seyn.

372 §.

Eine Pyramide und ein Kegel sind also gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben: und hieraus folgt, daß alle Kegel gleich groß sind, wenn ihre Grundflächen und Höhen es sind.

Ein Cylinder ist demnach dreymahl so groß, als ein Kegel, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Auch gelten alle übrige Sätze vom Cylinder und Kegel, die im 359 § vom Prisma und der Pyramide erwiesen sind.

373 §.

373 §.

Den Inhalt eines Kegels auszurechnen, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche und seine Höhe bekannt ist.

Aufl. Man berechne den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn in den dritten Theil der Höhe des Kegels: so giebt das Product den Inhalt einer dem Kegel gleichen Pyramide (360 §), also den Inhalt des Kegels selbst. Wenn der Grundfläche Durchmesser = 73 Fuß, die Höhe 48 Fuß ist; so ist die Grundfläche 4185, Quadrat-Fuß, und der Kegel = 66960 Cubic-Fuße.

374 §.

Concentrische Cylinder ABCD, EFGH, heis- 170
sen solche, die einerley Axe haben, und ihre Grund- F.
flächen sind concentrische Kreise. Das Stück, um welches der grössere Cylinder ABCD den kleinern EFGH übertrift, und welches zwischen den beyden Cylindrischen Oberflächen und zweenen Ringen um HG und EF eingeschlossen ist, heißt eine Cylindrische Röhre (tubus cylindricus). Die Axe beyder Cylinder heißt auch die Axe der Röhre, und ihre Höhe ist mit der Cylinder Höhe einerley.

Wenn beyde Cylinder senkrechte sind; so wird auch die Röhre eine grade Röhre, im Gegentheil eine schiefe Röhre seyn.

Wenn das Rechteck durch die Axe ABCD sich um die Axe KI so drehet, wie im 364 § angenommen worden; so beschreibt das Stück ABEH desselben die eine Hälfte, und das Stück GFCD die andere Hälfte der Röhre. Sind die Rechtecke ABCD, EFGH durch die Axe der concentrischen Cylinder in

der

der Zeichnung nur ausgedruckt; so kann man sich die Röhre zwischen ihren Oberflächen leicht vorstellen.

375 §.

170 Das Stück BE, welches vom Halbmesser KB
F. der grössern Grundfläche in den Ring zwischen den Kreislinien BC und EF fällt, und die Breite dieses Rings abgiebt, ist zugleich die Dicke der Cylindrischen Röhre, deren Grundfläche der Ring ist. Der Durchmesser EF der kleinern Grundfläche, kann die inwendige Weite der Röhre, und BC der grössern Grundfläche Durchmesser, die auswendige Weite der Röhre, heissen. Ein Rechteck, dessen eine Seite die Dicke der Röhre BE, und die andre Seite der Ueberschuß EC der auswendigen Weite über die Dicke ist, heißt der Kürze wegen das Rechteck der Röhre.

376 §.

170 Das Rechteck der Röhre $BE \times EC$ ist so
F. groß, als der Unterschied der Quadrate der halben auswendigen und inwendigen Weite der Röhre.

Beweis. Es sey EL auf BC senkrecht; so ist $BE \times EC = ELq$ (214 §). Aber $ELq = KLq - KEq$ (111 §), also auch $BE \times EC = KLq - KEq = KBq - KEq$.

377 §.

170 Eine Cylindrische Röhre $AEFD$ verhält
F. sich zu einem gleich hohen Cylinder $QMNR$, wie das Rechteck der Röhre zum Quadrat des Halbmessers der Grundfläche des Cylinders.

Beweis. Es ist Cyl. ABCD : Cyl. EFGH = Kreis BC : Kreis EF (369 §) = $KBq : KEq$ (255 §):

§): also ABCD – EFGH : EFGH = KBq – KEq : KEq (180 §). Da nun KBq – KEq = BE × EC (376 §), und ABCD – EFGH = der Röhre AEFD: so wird AEFD : EFGH = BE × EC : KEq. Weil ferner EFGH : QMNR = KEq : OMq; (369 §), so ist AEFD : QMNR = BE × EC : OMq.

Der XV. Abschnitt.

Vom Inhalt der Kugel.

378 §.

Die Kugel ist ein Körper, den eine krumme 71
Oberfläche ADBE so umgiebt, daß alle ihre F. Puncte von einem Punct C innerhalb des Körpers, welcher der Kugel Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt sind. Jede grade Linie CA vom Mittelpunct der Kugel bis an einen Punct ihrer Oberfläche gezogen, heißt ein Halbmesser der Kugel (radius, s. semidiameter sphaerae): also sind alle Halbmesser der Kugel gleich groß.

379 §.

Jede grade Linie DE, die durch einen Punct G innerhalb der Kugel geht, trift ihre Oberfläche wenigstens in zweenen Puncten D und E, aber auch nicht in mehrern. Denn wäre F ein dritter Durchschnitts-Punct; so würde die Ebene durch C, D, E, auch durch F gehen (10 §), und es würde CD = CE = CF seyn müssen, welches dem 73 § entgegen ist.

Eine grade Linie AB durch der Kugel Mittelpunct C zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen,

gezogen, heißt ein Durchmesser der Kugel. Dieser ist demnach doppelt so groß, als der Kugel Halbmesser, und deswegen sind alle Durchmesser in einerley Kugel gleich groß.

380 §.

Jeder Punct, dessen Entfernung von der Kugel Mittelpunct kleiner, oder grösser, als der Halbmesser ist, liegt im ersten Fall innerhalb, im zweyten Fall, ausserhalb der Kugel, so wie er in der Oberfläche der Kugel liegen muß, wenn seine Entfernung vom Mittelpunct dem Halbmesser gleich ist.

381 §.

172 Wenn eine Ebene *AB* die Kugel durch ih-
F. ren Mittelpunct C schneidet; so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dessen Halbmesser und Mittelpunct, mit der Kugel Halbmesser und Mittelpunct einerley ist so, daß alle diese Kreise in einerley Kugel gleich groß sind, die Ebene mag übrigens liegen, wie sie wolle.

Auch theilet jede solche Ebene die Kugel in zwo gleiche Halbkugeln.

Beweis. Alle Puncte A, D, B, E u. s. f. des Umfangs der Durchschnittsfigur liegen in der Kugel Oberfläche; deswegen sind CA, CB, CD, CE, u. s. f. Halbmesser der Kugel, und insgesammt gleich groß. Demnach ist ADBE ein Kreis, der mit der Kugel einerley Mittelpunct und Halbmesser hat.

Wenn nun ein Durchmesser der Kugel FG auf der Ebene ADBE senkrecht stehet, und man legt durch E, C, und F, oder durch D, C, und G eine Ebene: so werden beyde Durchschnittsfiguren gleich grosse Kreise der Kugel, wovon die Stücke FE, DG Quadranten sind, weil ECF = R = DCG (364 §). Ist nun

der

der Winkel ACE = ACD, und man kehrt das unterste Stück AEBDG der Kugel um AB herum, bis die Ebene ABD in AEB fällt; so fällt CG in CF (305 §) G in F, CD in CE (18 §), und DG in EF (116 §). Dies geschieht allemahl, wie groß man ACE nehmen will: also passen beyde Stücke der Kugel ineinander, und sind gleich grosse Halbkugeln.

382 §.

Wenn eine Ebene *AB* die Kugel nicht durch den Mittelpunct schneidet, und man ziehet von der Kugel Mittelpunct *C* auf diese Ebene eine lothrechte Linie *CD*: so geht diese durch einen Punct *D* dieser Ebene innerhalb der Kugel. 173 F.

Beweis. Denn wäre *Cd* auf dieser Ebene senkrecht, und fiele *d* ausserhalb der Kugel: so wäre *Cd* grösser, als der Kugel Halbmesser (380 §). Aber auch jede grade Linie CD von C nach einem Punct D in der Durchschnittsfigur gezogen, wäre grösser, als *Cd* (305 §), also grösser, als der Halbmesser (13 §. R.), also müste D ausser der Kugel liegen, gegen die Voraussetzung.

383 §.

Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis, dessen Mittelpunct derjenige ist, in welchem eine lothrechte Linie durch der Kugel Mittelpunct die Ebene des Schnitts trift.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunct sind diese Kreise gleich groß: bey ungleichen Entfernungen aber ist derjenige grösser, der dem Mittelpunct näher liegt, als der entferntere.

Beweis. Es sey CD auf der Ebene AB lothrecht: so liegt D innerhalb der Durchschnittsfigur (382 §). 173 F.

Von D sey nach einem Punct A im Umfange derselben DA, und überdem CA gezogen: so ist DA = $\surd$ (ACq — CDq (283 §). Weil nun AC, und CD immer einerley Grösse behalten, wo auch A im Umfang genommen wird; so ist auch DA immer von einerley Grösse, also die Figur ein Kreis, und D sein Mittelpunct.

Ist nun CE die Entfernung der Ebene eines andern Schnitts vom Mittelpunct, in dessen Umfang F liegt: so ist auch dieser Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser EF = $\surd$ ($CF^2 - CE^2$). Es ist aber AC = CF (378 §). Wenn also überdem CD = CE ist, so ist DA = EF; wenn CD > CE ist, so ist DA < CE; und wenn CD < CE ist, so ist DA > CE, woraus der zweyte Satz folget.

384 §.

Hieraus ergeben sich sehr leicht noch folgende Sätze.

Unter allen Kreisen auf der Oberfläche der Kugel sind diejenigen die grösten, deren Ebenen durch der Kugel Mittelpunct gehen, und sie heissen deswegen gröste Kreise, die übrigen aber kleinere Kreise der Kugel.

Wenn demnach ein Kugelschnitt ein gröster Kreis ist; so geht seine Ebene durch der Kugel Mittelpunct, weil es sonst auf eben der Kugel noch grössere Kreise geben müste.

Eine grade Linie CE durch des kleinern Kreises FG, und der Kugel Mittelpunct steht auf der Ebene des Kreises FG lothrecht. Denn wäre nicht CE, sondern Ce auf FG senkrecht; so wäre e dieses Kreises Mittelpunct, wider die Voraussetzung.

Also geht auch jede grade Linie, auf des kleinern Kreises FG Ebene im Mittelpunct E lothrecht gesetzt, durch

durch der Kugel Mittelpunct C. Wäre Ec auf FG senkrecht, und gienge nicht durch C: so wäre zugleich CE auf FG senkrecht, welches nicht seyn kann (305 §).

Sind zweene kleinere Kreise der Kugel AB, FG gleich groß: so sind sie vom Mittelpunct der Kugel gleichweit entfernt. Denn ihre Entfernungen sind CD, CE, und es ist $CD = \sqrt{(ACq - ADq)}$, $CE = \sqrt{(CFq - EFq)}$, also $CD = CE$, wenn $AD = EF$.

Ist aber $EF > AD$, so ist $CE < CD$: also liegt der grössere Kugelschnitt dem Mittelpunct näher, als der kleinere.

385 §.

Jede grade Linie *AB* zwischen zweenen Puncten der Oberfläche einer Kugel gezogen fällt ganz innerhalb der Kugel. 173 F.

Beweis. Denn sie liegt allemahl in der Ebene eines grösten Kreises AßFH, und ist eine Sehne desselben, die ganz in der Kreisfläche fällt.

386 §.

Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar mit der Kugel Oberfläche zusammen stößt, aber kein Punct von ihr innerhalb der Kugel fällt.

Also kann eine Ebene die Kugel nur in einem Punct berühren. Denn geht eine Ebene durch zweene Puncte A und B in der Kugel Oberfläche; so liegt die grade Linie AB in dieser Ebene, aber auch zugleich innerhalb der Kugel (385 §). Demnach berührt die Ebene die Kugel nicht, weil Puncte von ihr innerhalb der Kugel fallen.

387 §.

Eine Ebene *MN* durch einen Punct *H* in der Kugel-Oberfläche auf dem Halbmesser *CH* 173 F. senkrecht gesetzt, berührt die Kugel.

Beweis. Denn jeder andre Punct I dieser Ebene liegt ausserhalb der Kugel, weil CI ▷ CH, oder CI grösser als der Halbmesser ist (380 §.).

388 §.

Wenn eine Ebene *MN* die Kugel in *H* berührt; so ist der Halbmesser *CH* im Berührungspunct auf der Ebene *MN* senkrecht.

Beweis. Weil alle andre Puncte der Ebene MN, H ausgenommen ausser der Kugel fallen; so müssen sie alle von C weiter entfernt seyn, als H davon entfernt ist. Demnach ist CH unter allen Linien von C nach MN die kürzeste, folglich auf MN senkrecht (305 §.).

Demnach muß eine durch den Berührungspunct H auf MN senkrecht gesetzte grade Linie durch der Kugel Mittelpunct C, und jede von C auf MN senkrecht gezogene Linie durch den Berührungspunct H gehen (305 §.).

389 §.

174 F. Es sey ABD ein Halbkreis, und der Halbmesser CB auf dem Durchmesser AD senkrecht. Der Halbkreis werde um BC gedrehet, bis A in D, und D wiederum in A gekommen ist: so beschreibt der Halbkreis eine Halbkugel, CA beschreibt die eine, und CD die andre Hälfte eines grösten Kreises, den man die Grundfläche der Halbkugel nennen kann, und auf seiner Ebene steht CB senkrecht. Man kann CB die Höhe der Halbkugel nennen, weil eine Ebene, welche die Halbkugel in B berührt, mit der Ebene der Grundfläche parallel ist.

Wenn E ein Punct im senkrechten Halbmesser BC ist, wodurch man eine Sehne FG des Halbkreises mit AD parallel gezogen hat, und wenn nicht allein

FH, GI, sondern auch AK und DL auf AB senkrecht gesetzt sind, AK und DL aber mit FG in K und L zusammenstossen; so beschreibt das Rechteck HFGI einen graden Cylinder, dessen Oberfläche in der Kugel, und das Rechteck AKLD einen graden Cylinder, dessen Oberfläche ausser der Kugel fällt. Man kann jenen, einen inwendigen, und diesen den dazugehörigen auswendigen Cylinder nennen.

Beyder Unterschied ist eine Cylindrische Röhre AFGD (374 §.).

390 §.

In einer Halbkugel *ABD* kann man so viele inwendige und zugehörige auswendige gleich hohe grade Cylinder beschreiben, daß der Unterschied aller inwendigen von den auswendigen weniger, als jeder gegebene Körper, beträgt.

Beweis. Man theile den senkrechten Halbmesser BC bey E, M, N, u.s.f. in so viel gleiche Theile, 174 F.
als man will, und ziehe durch alle Theilungspuncte mit AD die parallelen Sehnen FG, OP u. s. f. auch zuletzt durch B mit AD die Parallele $\varkappa\lambda$, welche den Kreis berührt. Man zeichne für FG, OP, $\alpha\beta$, u. s. f. die Cylinder HGFI, und AKLD, SOPV und QFGR u. s. f. wie im 389 §: so erhält man zuletzt einen auswendigen Cylinder $\alpha\varkappa\lambda\beta$, dem kein inwendiger mehr zugehört. Nun fällt ohne Weitläuftigkeit leicht in die Augen, es sey

der Cyl. $\alpha\varkappa\lambda\beta$ = Cyl. $\zeta\varepsilon\eta\vartheta$
die Röhre $O\alpha\beta P$ = Röhre $T\varepsilon\eta W$
die Röhre $FOPG$ = Röhre HSVI
die Röhre AFGD = Röhre AFGD.

Man addire alles auf beyden Seiten, so erhält man gleiche Summen. Nun macht die erste Sum-

me die gesammte Differenz aller inwendigen und auswendigen Cylinder, die zwote Summe aber, den ganzen Cylinder AKLD aus. Also ist dieser letzte Cylinder allemahl so groß, als die Differenz aller inwendigen und auswendigen in und um die Halbkugel beschriebenen Cylinder.

Halbirt man nun jede der Abtheilungen CE, EM, u. s. f. und verfährt, wie vorhin: so wird AKLD halb so groß, als vorher (369 §.). Denn seine Höhe wird halb so groß, als die vorige, und dies erfolgt jedesmahl, wenn man aufs neue halbirt, und die übrige Arbeit wiederholt. Ist nun gleich D ein Körper, so klein man will; so wird endlich AKLD $< D$ (139 §. Rech.).

391 §.

Der Unterschied der Halbkugel von der inwendigen Cylindersumme ist allemahl kleiner, als AKLD, also wird auch dieser Unterschied kleiner werden können, als jeder gegebene Körper. Es sey nun ein Körper Z kleiner als die Halbkugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey D: so ist $Z + D = H$, wenn H die Halbkugel bedeutet. Die Summe aller inwendigen Cylinder sey S, und ihre Differenz von der Halbkugel sey δ: so ist auch $S + \delta = H$, und $S + \delta = Z + D$. Man nehme nun der inwendigen Cylinder so viele, daß $\delta < D$ wird: so ist $S > Z$. Demnach kann die Summe aller inwendigen Cylinder grösser werden, als jeder Körper, der kleiner, als die Halbkugel ist.

392 §.

Auch ist der Unterschied der Halbkugel von der auswendigen Cylindersumme kleiner, als AKLD: es kann demnach auch dieser Unterschied kleiner werden, als jeder gegebene Körper.

Er

Er sey △, und der auswendigen Cylinder Summe Σ: so ist Σ = H + △. Es sey ein Körper Y grösser, als die Halbkugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey E: so ist H + E = Y. Man nehme nun der auswendigen Cylinder so viele, daß △ < E wird: so ist H + △ < H + E, folglich Σ < Y. Demnach kann die Summe der auswendigen Cylinder kleiner werden, als jeder Körper der grösser als die Halbkugel ist.

393 §.

Die Halbkugel ist doppelt so groß, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Wenn AB, DE ein Paar senkrechte 175
Durchmesser des Kreises ADBE sind, und man hat 176
durch A, D, B, E Tangenten des Kreises gezogen; F.
so erhält man ein Quadrat F*a*b*b*G um den Kreis.
Man ziehe CF, CG, und mache sich die Vorstellung,
die Figur werde um DE gedrehet: so beschreibt der
Kreis eine Kugel F*a*b*b*G sowohl, als FABG einen
Cylinder, FCG einen Kegel, und der beyden letztern Grundfläche FG ist der Grundfläche AB der Halbkugel ADB gleich, so wie auch die Höhen CE und DC dieser Körper gleich sind. Nun ist der Cylinder FABG = 3 Kegel FCG (372 §). Wenn man also den Kegel FEG aus dem Cylinder FABG herausnimmt; so wird das übrige Stück AF CBG = 3 FCG − FCG = 2 FCG. Es kann aber der Körper AFCGB weder kleiner, noch grösser als die Halbkugel ADB seyn.

Es sey AFCGB < ADB, und man beschreibe in 175
der Halbkugel ADB so viel inwendige Cylinder LM, F.
NO, PQ, u. s. f. daß ihre Summe S > AFCGB

ist

ist (391 §). In so viele gleiche Theile nun CD bey H, I, K, u. s. f. getheilt worden, in eben so viel gleiche Theile sey auch CE bey R, S, T, u. s. f. getheilt. Durch R, S, T ziehe man UV, WX, YZ u. s. f. mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, u. s. f. CG in δ, ε, ζ, u. s. f. schneiden.

Durch α, β, γ, δ, ε, ζ, u. s. f. setze man die graden Linien $\alpha\eta$, $\beta\vartheta$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, $\zeta\nu$, u. s. f. aufwärts mit CE parallel: so ergeben sich durchs Umdrehen um DE in AFCGB so viel Cylindrische Röhren $A\alpha\delta B$, $U\beta\varepsilon V$, $W\gamma\zeta X$, als man inwendige Cylinder LM, NO, PQ in der Halbkugel hat. Es ist aber jede Röhre dem zugehörigen Cylinder gleich. Denn es ist $HMq = DH \times HE = A\eta \times \eta B$; $IOq = DI \times IE = U\vartheta \times \vartheta V$; $KQq = DK \times KE = W\varkappa \times \varkappa X$: also vermöge des 377 §.

Cyl. LM = Röhre $A\alpha\delta B$.
Cyl. NO = Röhre $U\beta\varepsilon V$.
Cyl. PQ = Röhre $W\gamma\zeta X$.

Folglich S = Summe aller Röhren, also auch $S < AFCGB$, welches wider die Voraussetzung streitet.

176. F. Es sey $AFCGB > ADB$, und man beschreibe um die Halbkugel ADB so viele auswendige Cylinder, LB, MN, OP, QR, u. s. f. daß ihre Summe $S < AFCGB$ ist (392 §). In so viele gleiche Theile nun CD bey diesem Geschäfte bey H, I, K, u. s. f. ist getheilt worden, in eben so viele gleiche Theile sey auch CE bey S, T, U, u. s. f. eingetheilt. Durch S, T, U ziehe man VW, XY, Zz mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, und CG in δ, ε, ζ, schneiden. Durch diese Durchschnittspuncte ziehe man ferner $\alpha\eta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, $\zeta\nu$ mit CE unterwärts parallel: so ergeben sich um den Körper AFCGB so

viele

viele Cylindrische Röhren, wovon die erste VABW selbst ein Cylinder wird, als um die Halbkugel ADB auswendige Cylinder beschrieben sind. Es ist aber jede Röhre dem zugehörigen Cylinder gleich. Man hat nemlich $HNq = DH \times HE = V\alpha \times \alpha W$, $PIq = DI \times IE = X\beta \times \beta Y$, $RKq = DK \times KE = Z\gamma \times \gamma z$. Also vermöge des 369 und 377 §.

Cyl. LB = Cyl. AW.
Cyl. MN = Röhre $V\eta\lambda W$.
Cyl. OP = Röhre $X\vartheta\mu Y$.
Cyl. QR = Röhre $Z\varkappa\nu z$.

Folglich S = Summe aller Röhren, also auch S > AFCGB, welches wiederum mit der Voraussetzung streitet.

Da nun AFCGB weder kleiner, noch grösser, als ADB seyn kann: so ist AFCGB = ADB, also auch ADB = 2FCG.

394 §.

Ein Kegel FDG, dessen Höhe doppelt so groß, als CE, ist ebenfalls = 2FCG: also ist die Halbkugel F. ADB = FDG, und die ganze Kugel ADBE = 2FDG. Da nun der Cylinder $FabG = 3FDG$ ist; so verhalten sich die drey Körper FDG, ADBE, $FabG$, wie die Zahlen 1, 2, 3, und die Kugel enthält zwey Drittheile eines Cylinders, dessen Grundfläche ihrem grösten Kreise, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

395 §.

Ein Paar Kugeln verhalten sich also wie ein Paar Cylinder auf ihren grösten Kreisen in der Höhe der Durchmesser: also ist ihr Verhältniß aus dem Verhältniß der grösten Kreise und der Durchmesser zusammen gesetzt. Aber das Verhältniß der grösten

Kreise ist das verdoppelte der Durchmesser (255 §): also ist das Verhältniß der Kugeln aus dem Verhältniß der Durchmesser, oder Halbmesser, dreymahl genommen zusammen gesetzt, oder dies Verhältniß ist die ratio triplicata der Durchmesser.

Demnach verhalten sich ein Paar Kugeln auch wie die Würfel ihrer Durchmesser, oder Halbmesser.

396 §.

Wenn der Durchmesser einer Kugel bekannt ist, ihren Inhalt zu berechnen.

Aufl. Aus dem bekannten Durchmesser berechne man den Umfang (286 §), und sodann den Flächen-Inhalt ihres grösten Kreises (291 §). Hierauf nehme man $\frac{2}{3}$ des Products aus dieser Fläche in den Durchmesser: so ist der Inhalt der Kugel gefunden.

Wenn der Durchmesser 73 Fuß ist; so ist des grösten Kreises Fläche $= 4185$, Q. F. (291 §) also die Kugel $= \frac{2}{3} \times 4185 \times 73 = 203670$ Cub. Fuß.

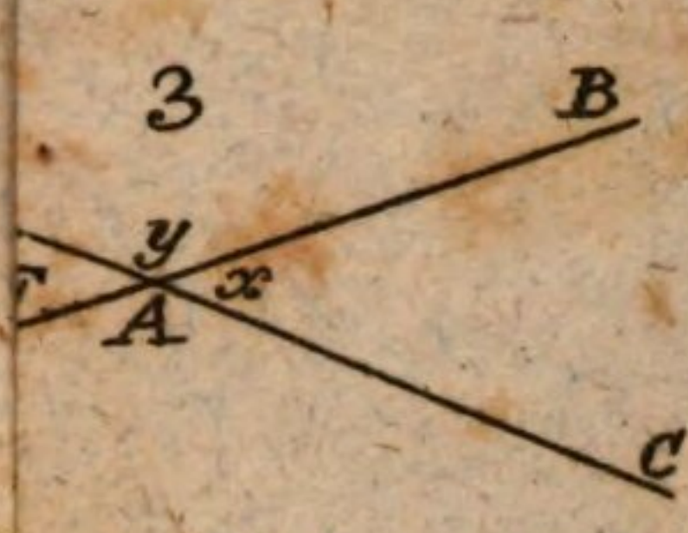
Wenn der Durchmesser $= d$ ist, so ist die Fläche des grösten Kreises $= \frac{1}{4}\pi dd$ (291 §), also die Kugel $= \frac{2}{3} . \frac{1}{4}\pi dd . d = \frac{1}{6}\pi d^3$. Man setze diesen Inhalt der Kugel $= S$, so ist $S = \frac{1}{6}\pi d^3$, und daraus folgt die Proportion, es sey $S : d^3 = \frac{1}{6}\pi : 1$. Je genauer man die Zahl π in Rechnung bringt, desto richtiger wird der Inhalt der Kugel gefunden.

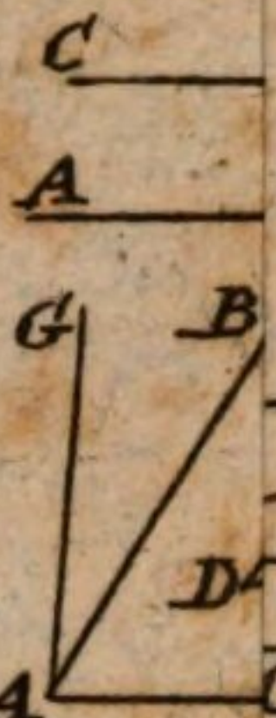
Bayerische Staatsbibliothek München

Pag. 257. Zeile 4. 5. ist so zu lesen:

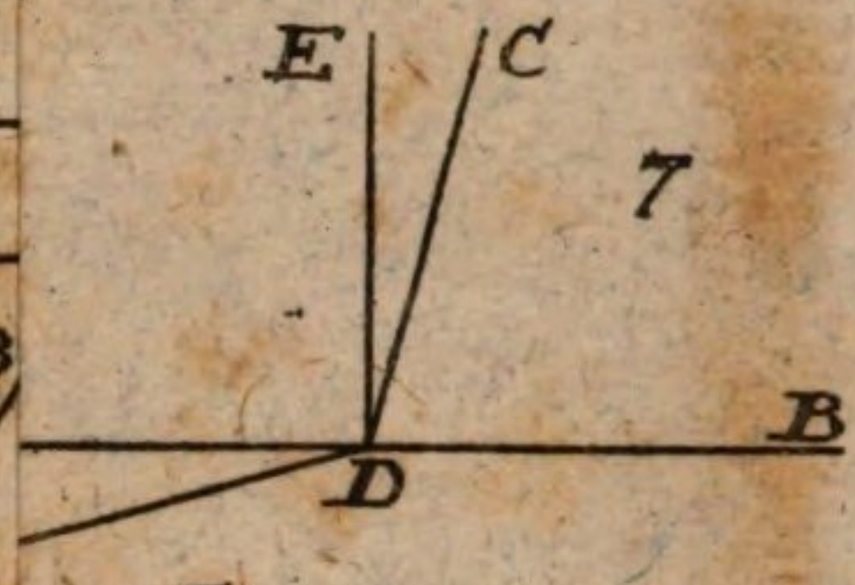
Eben daselbst ist der Beweis des Lehrsatzes num. V.
S. 165. 166. u. s. w.

3

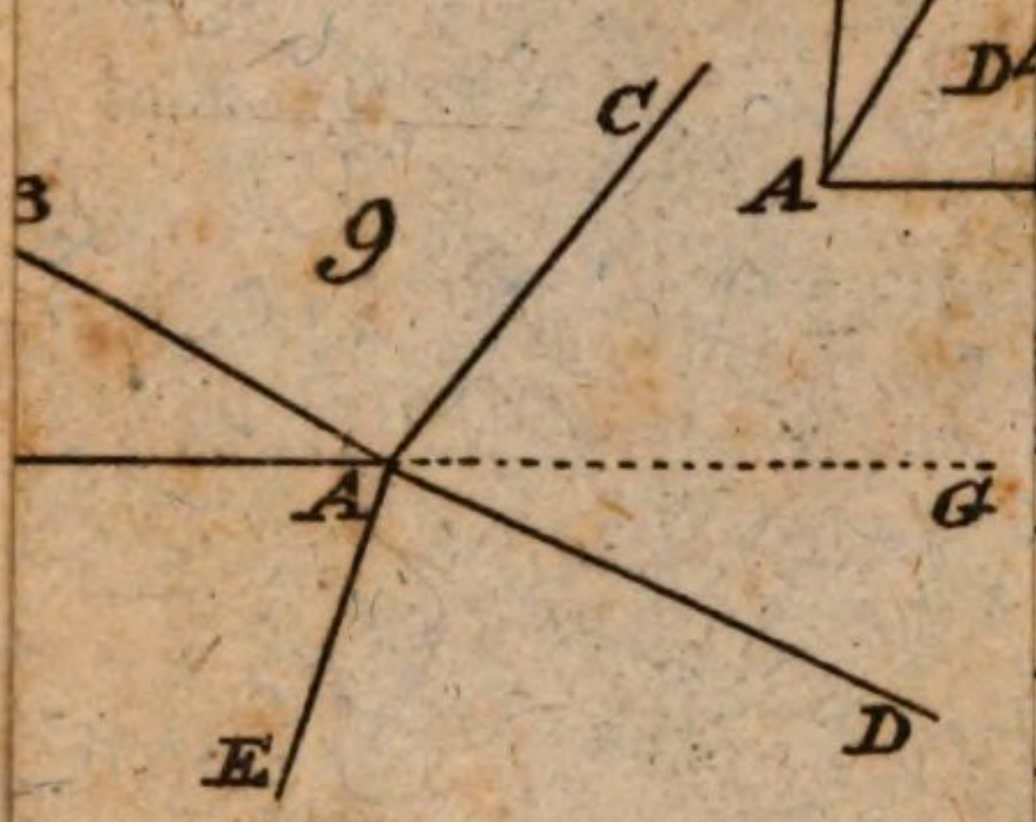


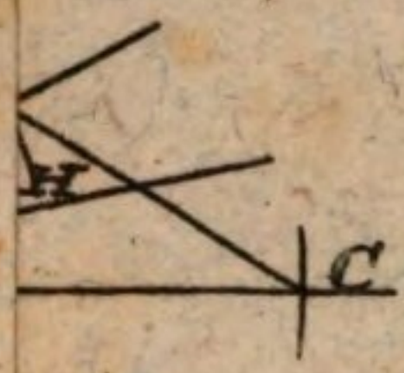


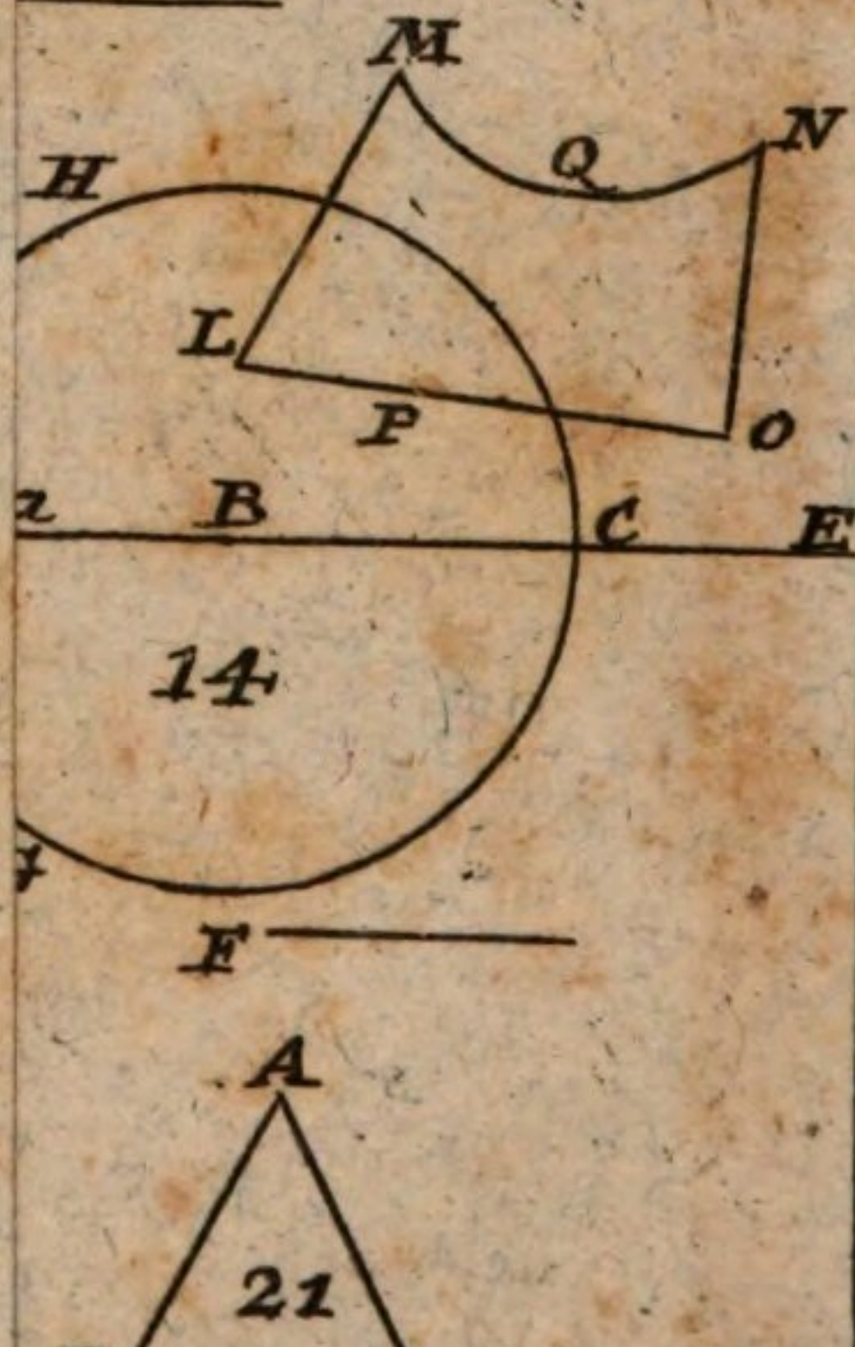
7



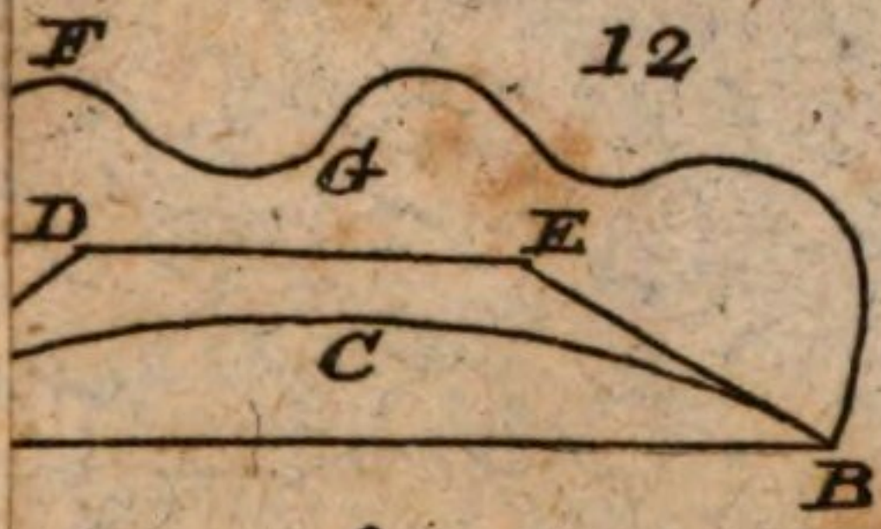
9





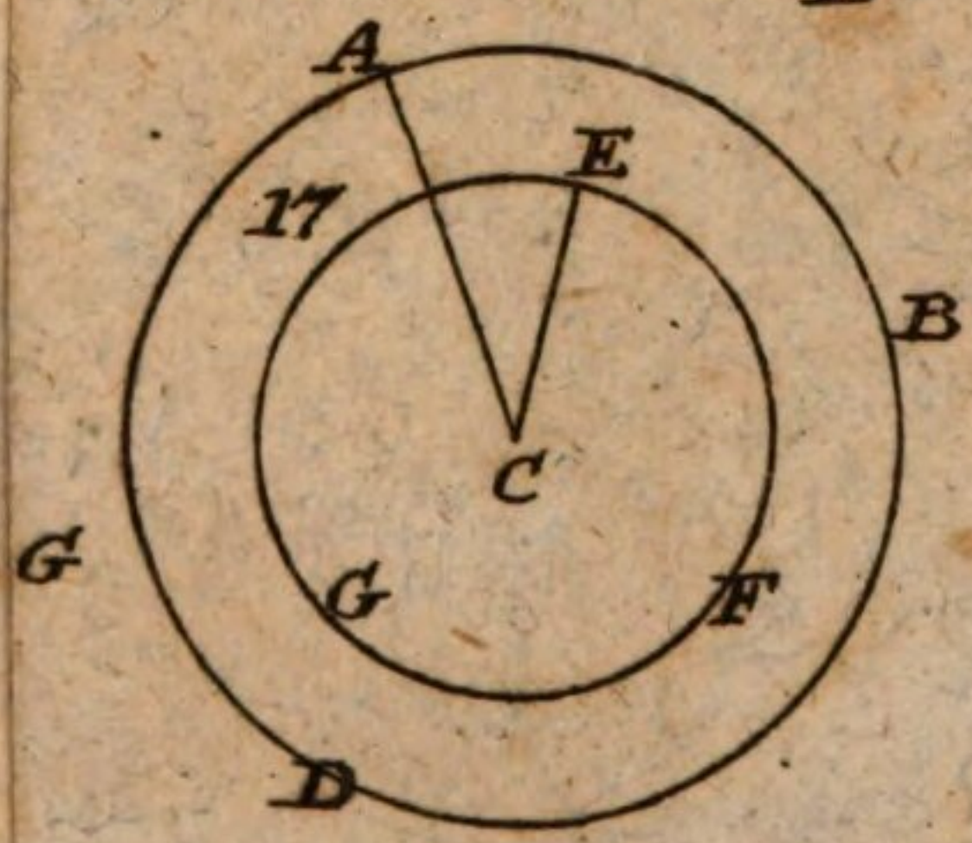


12

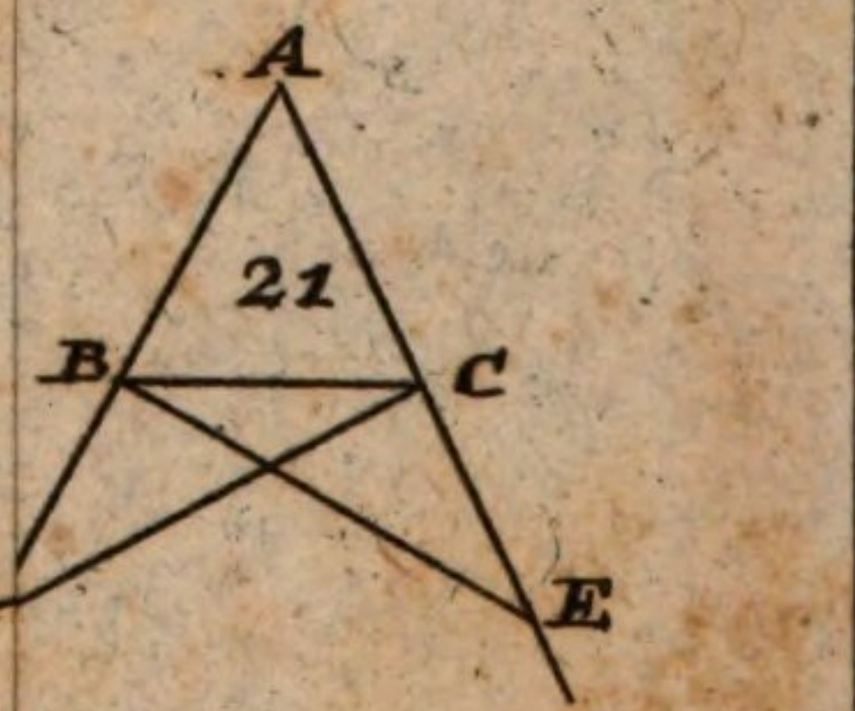


14

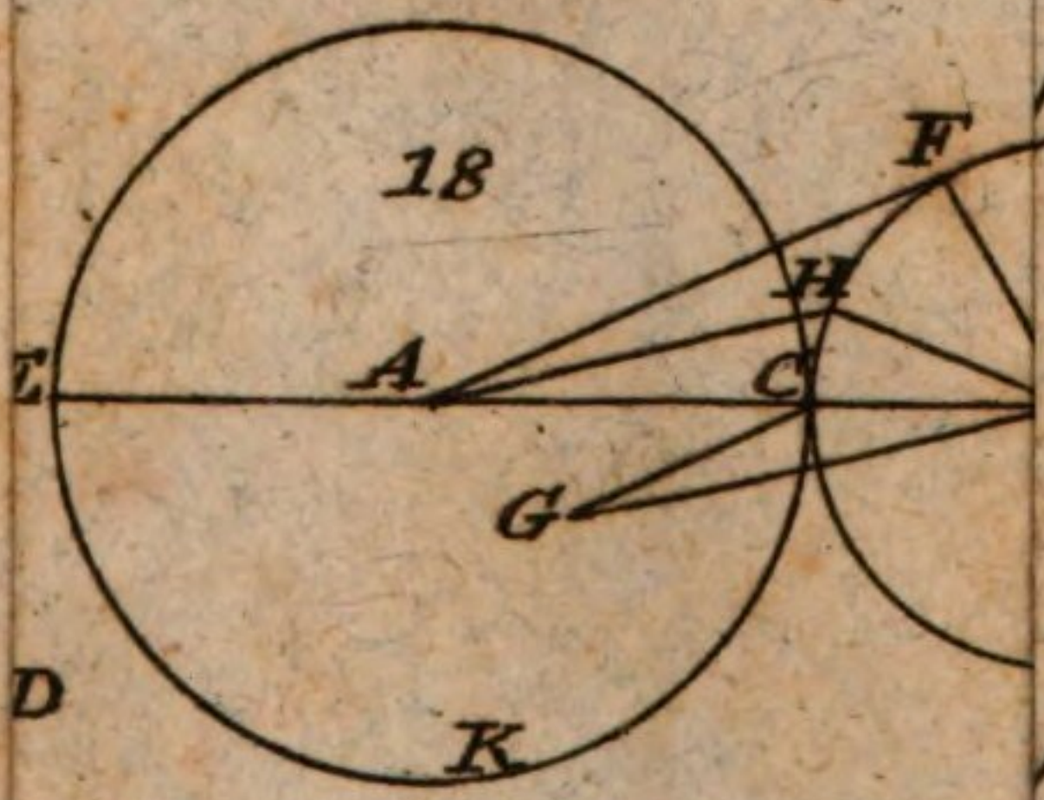
17



21



18



22

23

25
F
C
D
B
E
H

28
D
B
C

A
B
C

29
D
E
F
G

C
B

32
D
C
G
D
A
F

C
E
D

35
G
A
F
B

37
C
A
D
g
H
G
F

A
B
C

39
D
E
G
F
g

41
A
D
G
C

43
I
B
K
D
L
F
H

A
G
B
C

49
D
E
F

O
L
P

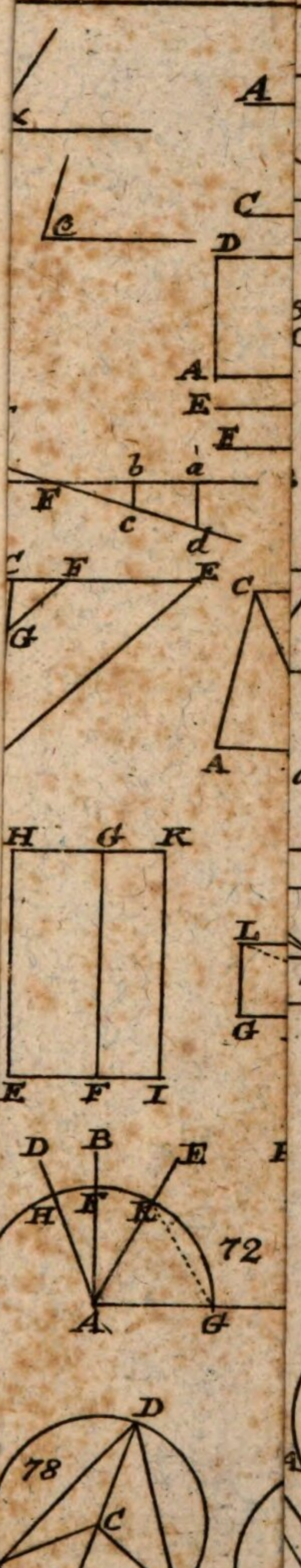
C
N

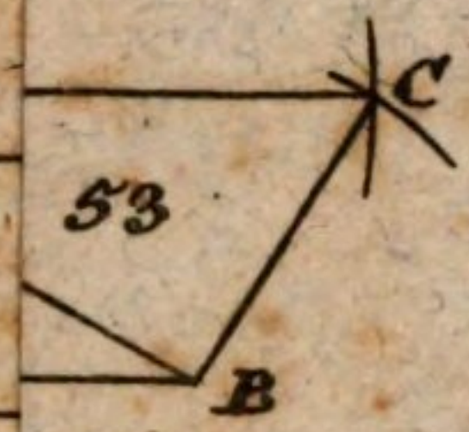
A
D

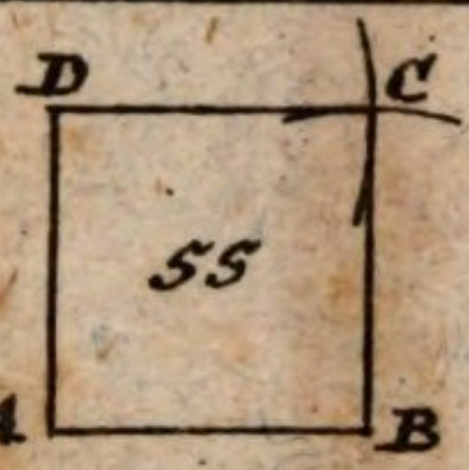
o
c
p
E
4
b
d
q
E

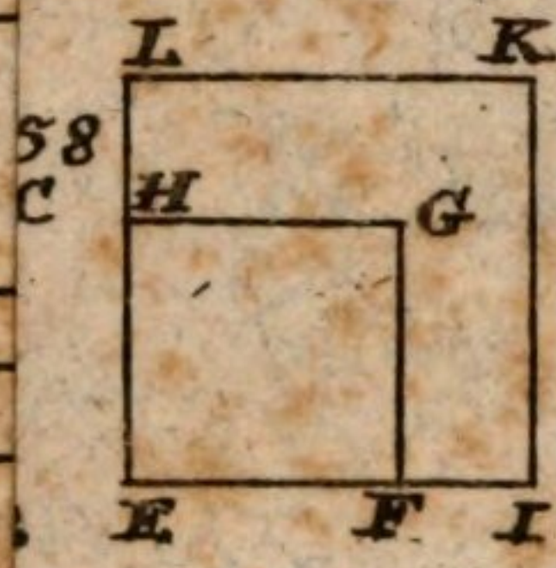
C
F

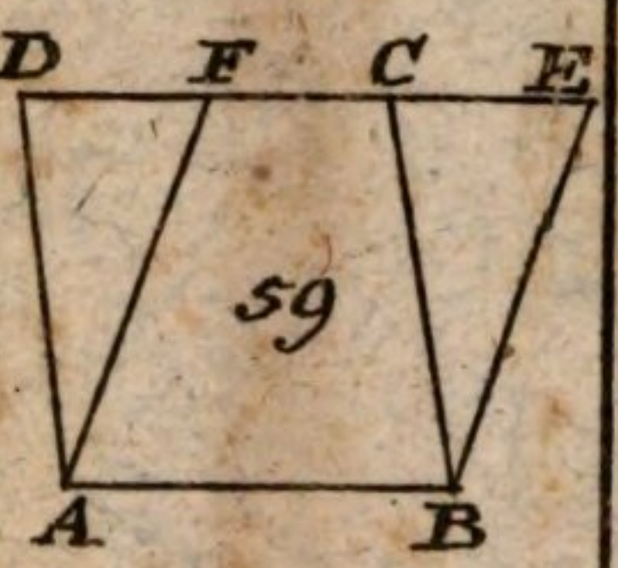
50
A
B
C


A
C
D
A
E
F
b
a
F
c
d
C
F
E
G
H
G
K
E
F
I

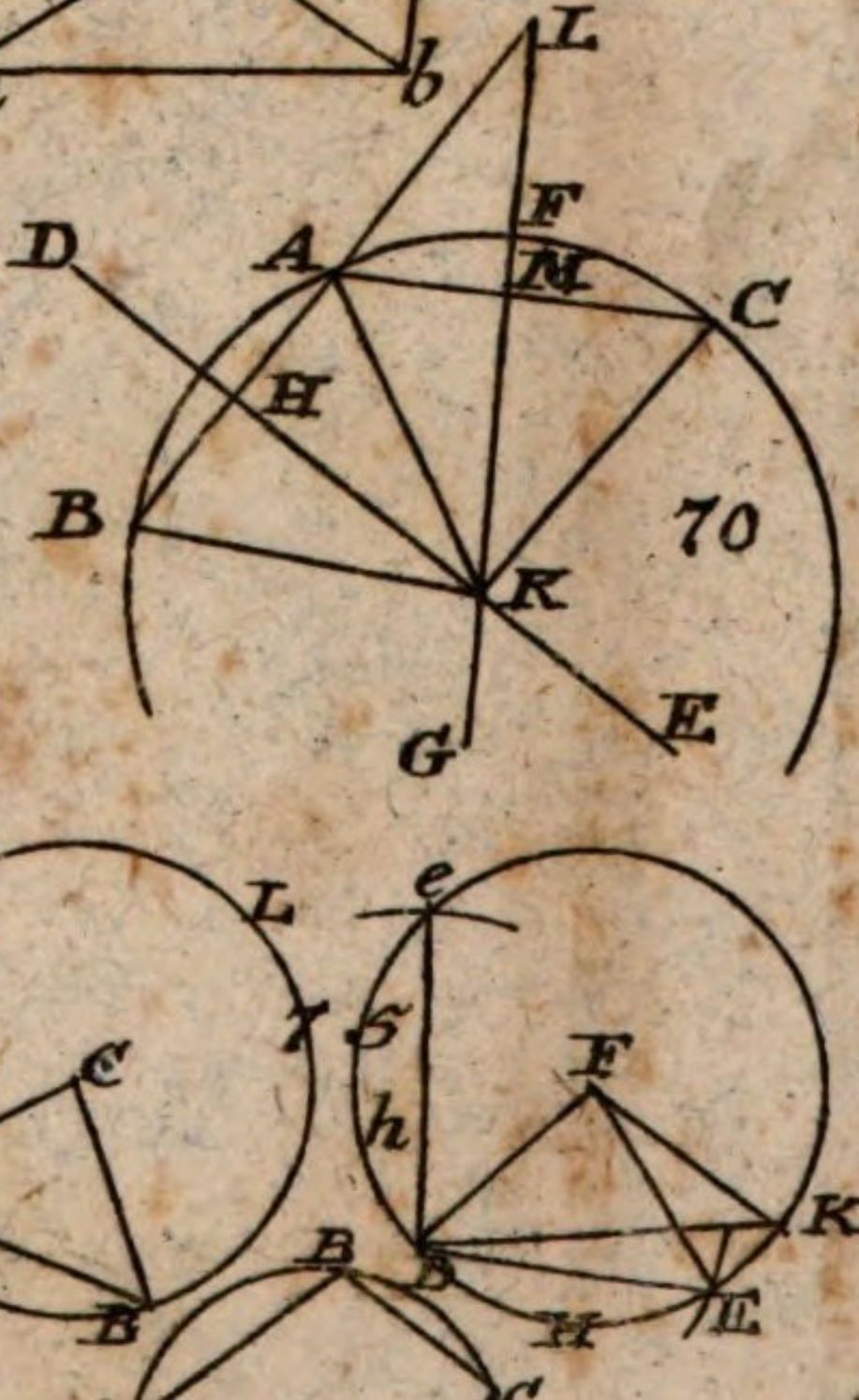

C
53
B


D
C
55
A
B


L
K
58
C
H
G
E
F
I

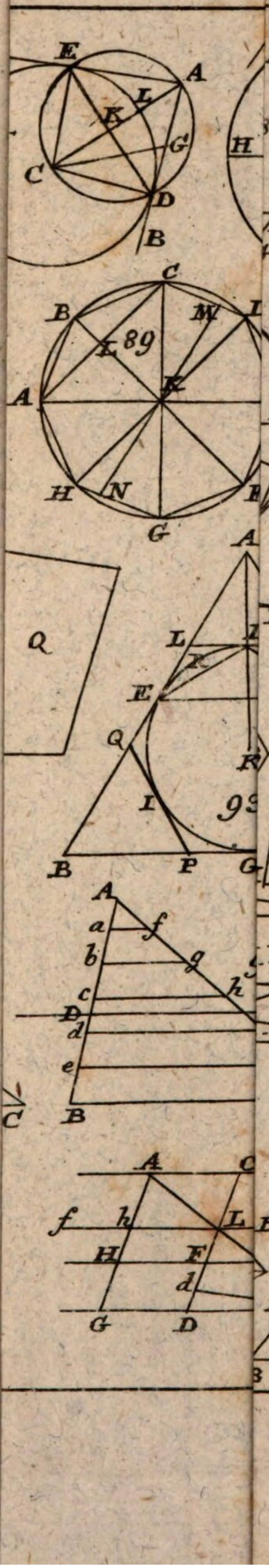

D
F
C
E
59
A
B

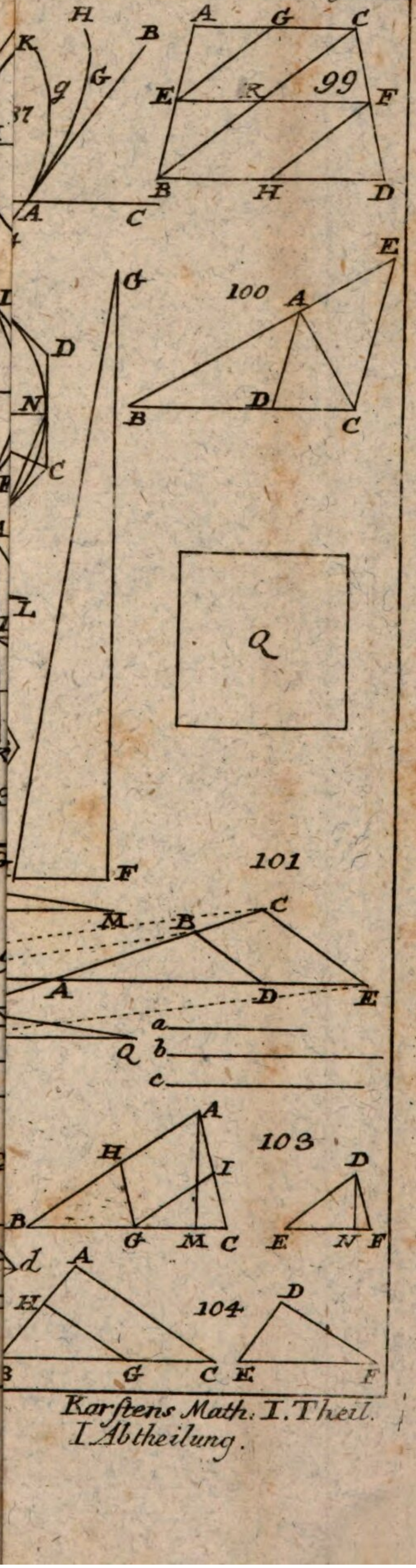
C
E
F
H
64
D
B
G
I
K
L
a
b
c
g
b
a
L
B
G

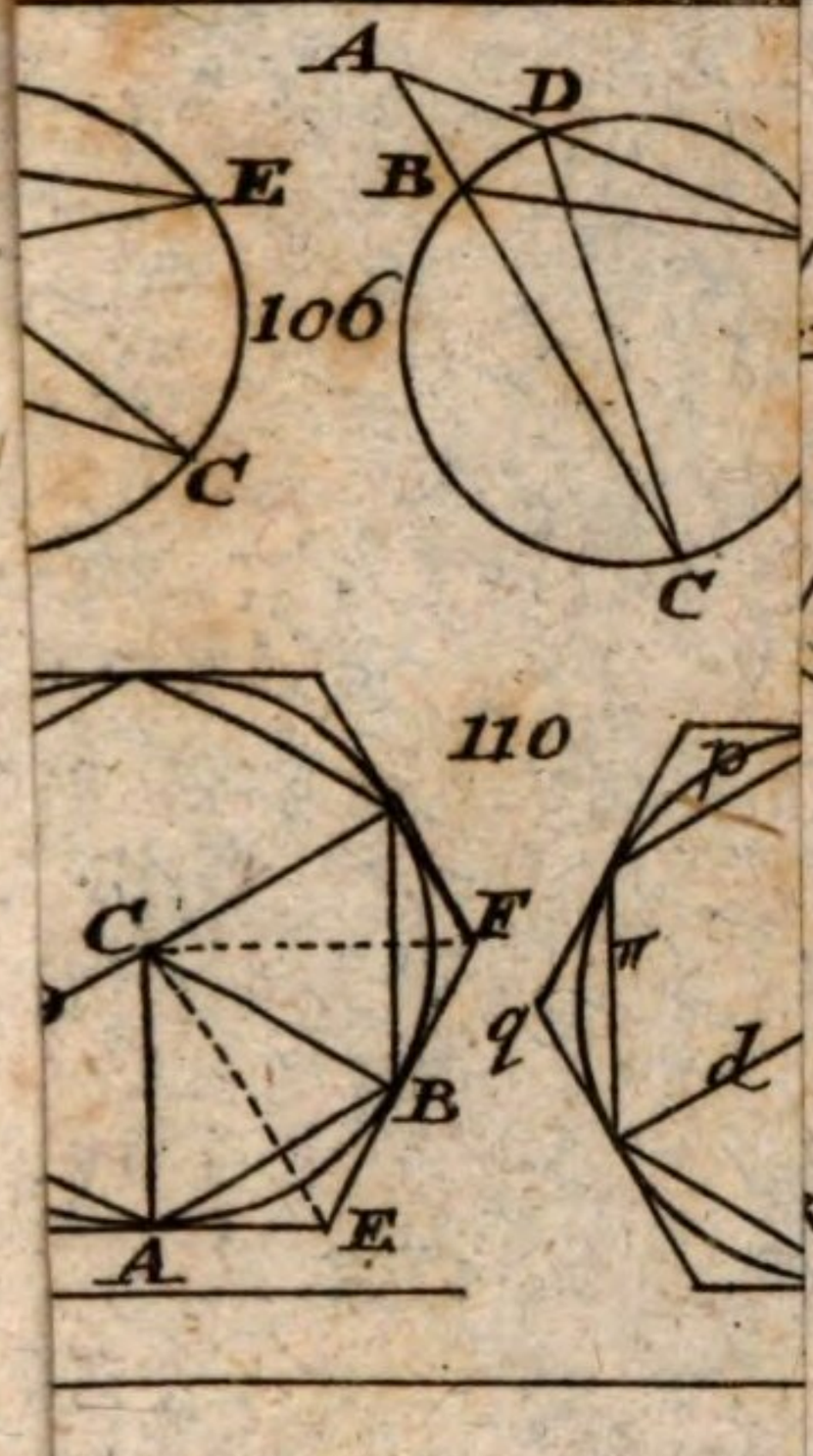

L
F
D
A
M
C
H
B
K
70
G
E

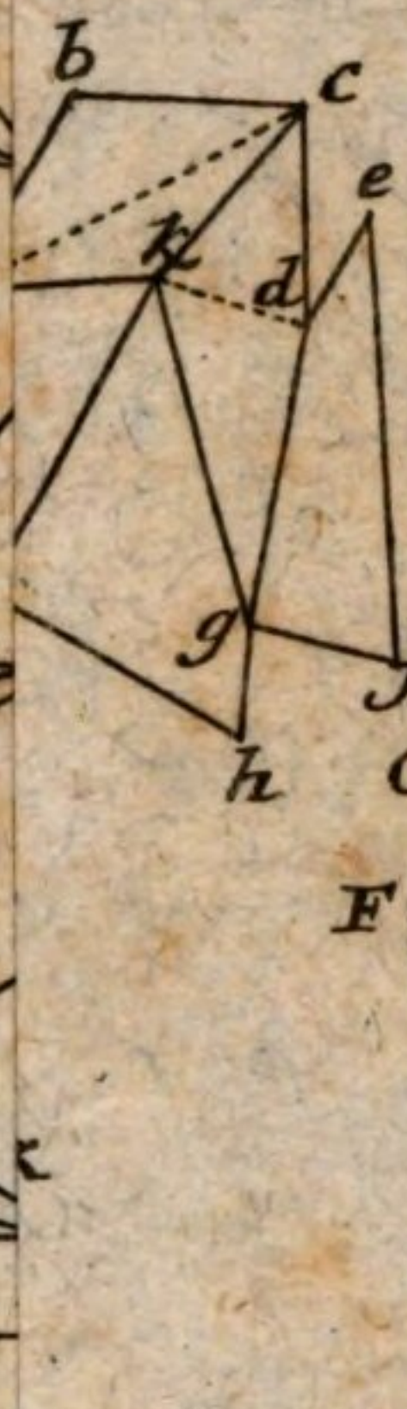
H
G
K
E
F
I
D
B
E
H
F
E
72
A
G

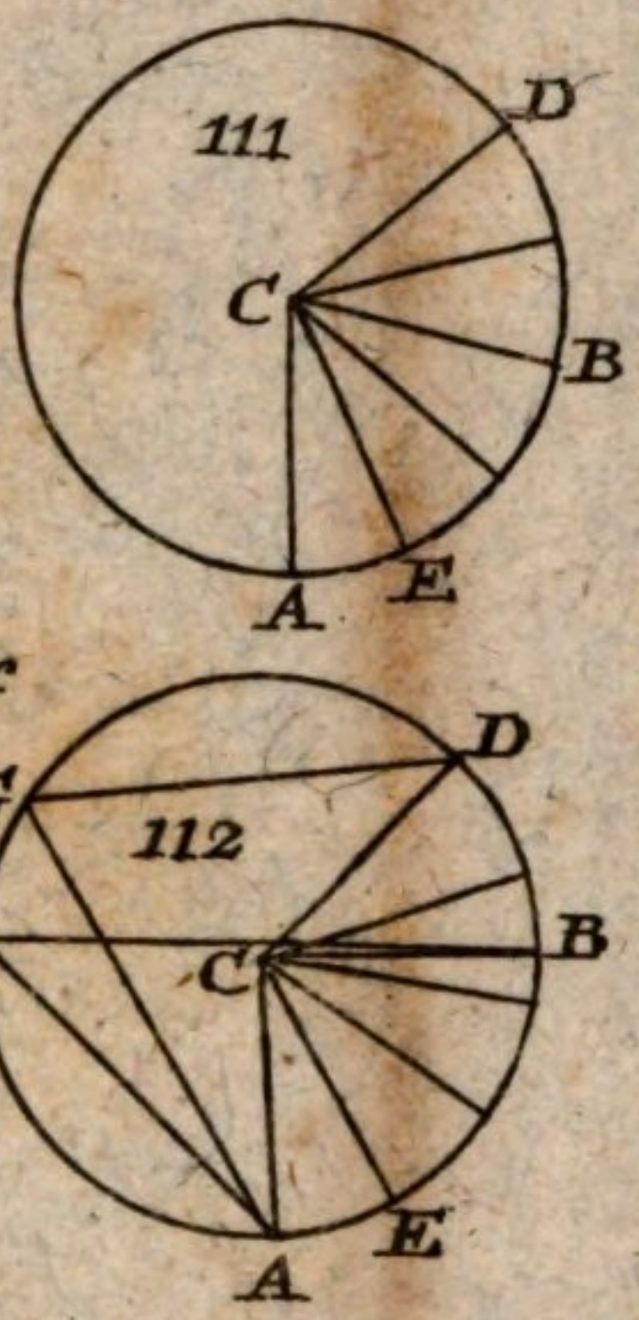
L
e
7
5
h
c
F
K
G
B
B
H
E
C
A
82.
C
D
F
H
G
D


E
A
L
K
G
C
D
B
C
B
M
I
89
L
K
A
D
N
H
N
G
A
Q
L
L
K
E
Q
R
I
B
P
G
A
a
f
b
g
c
h
D
d
e
B
C
A
C
f
h
L
H
F
d
G
D


H
K
B
G
g
37
H
A
C
A
G
C
E
R
99
F
B
H
D
E
G
100
A
D
B
C
Q
F
101
M
B
C
a
b
c
Q
A
H
I
B
G
M
C
D
E
N
F
104
D
H
B
G
C
E
F


A
D
E
B
106
C
C

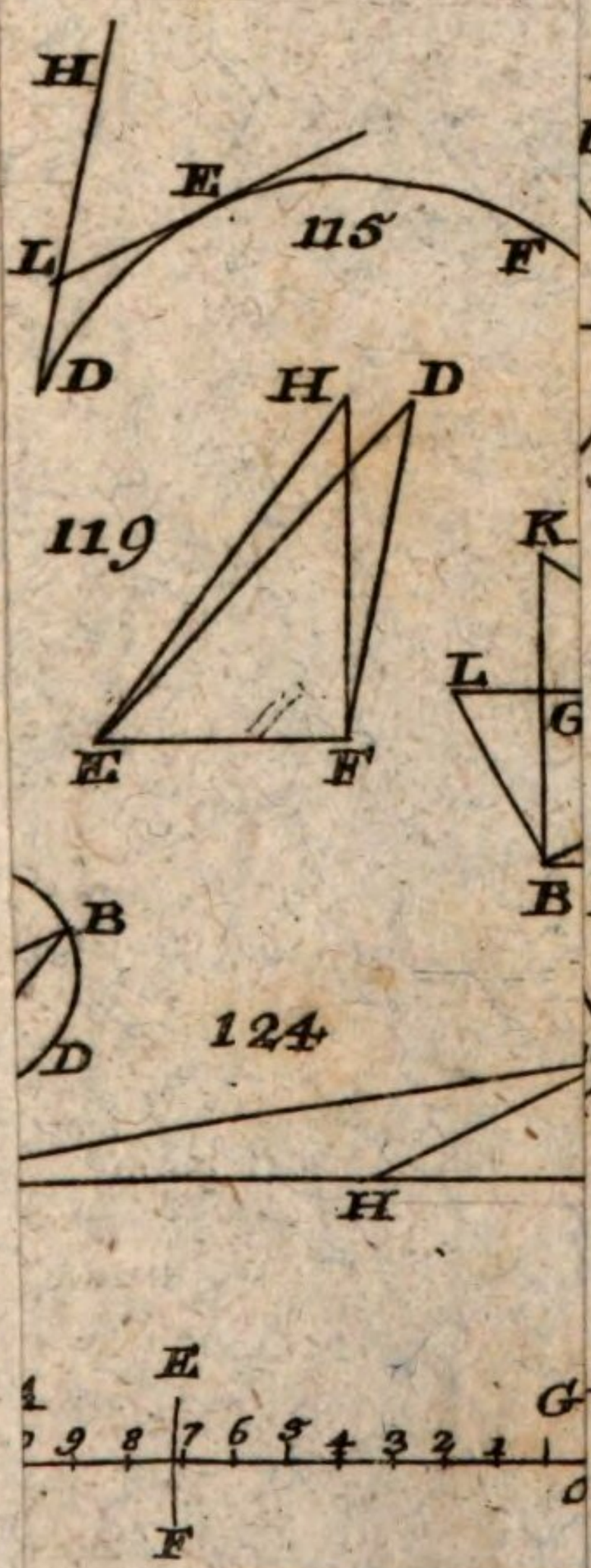

b
c
e
z
d
g
f
h

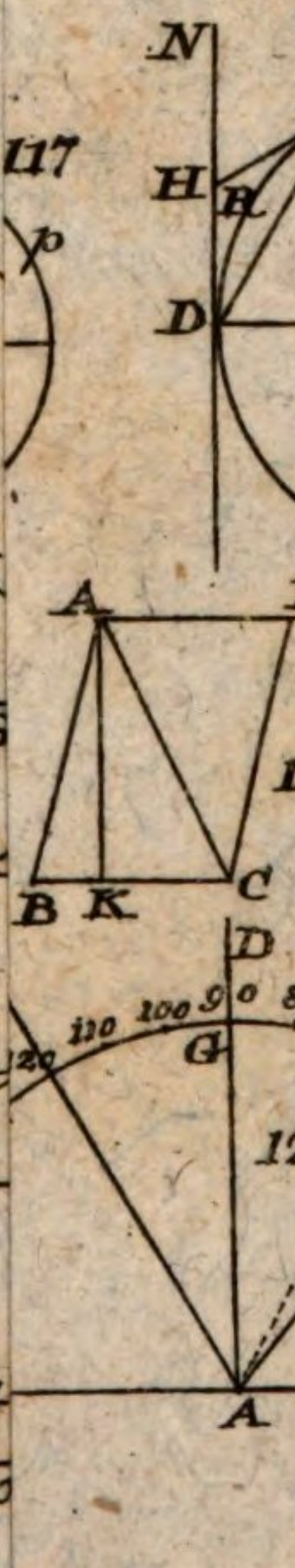

111
D
C
B
A
E

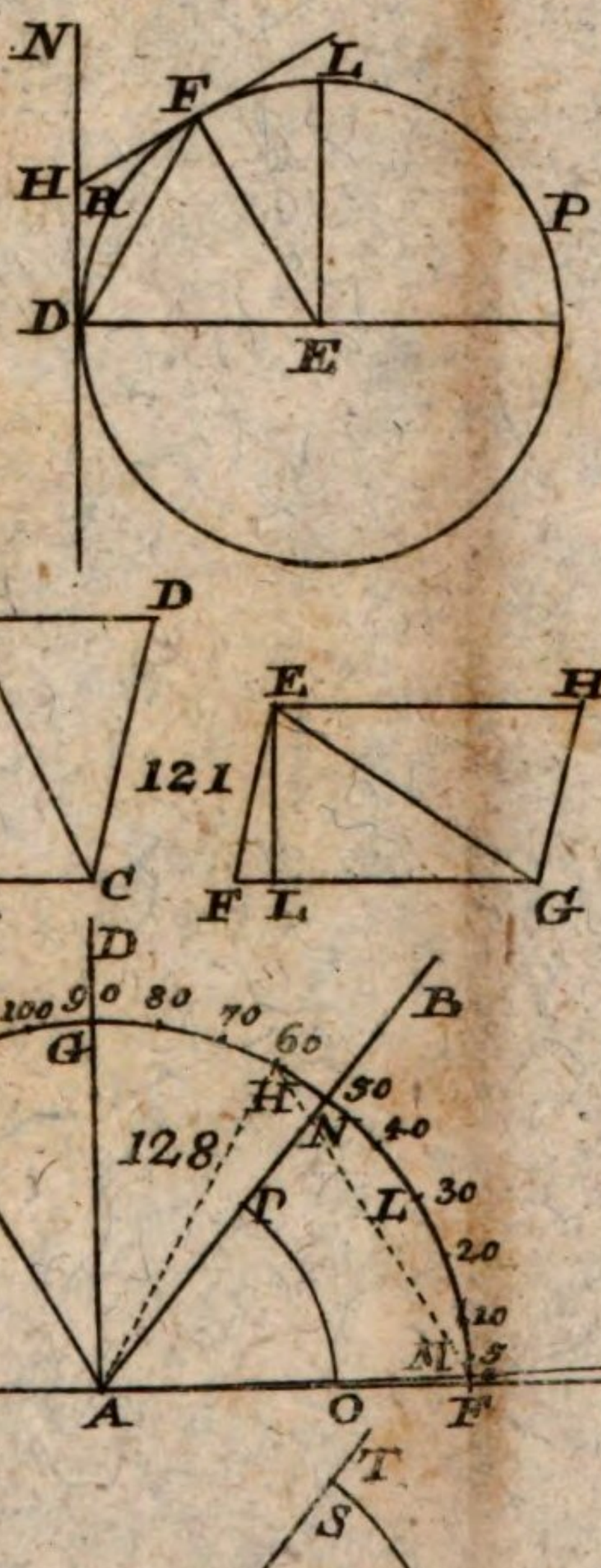
110
C
F
B
A
E

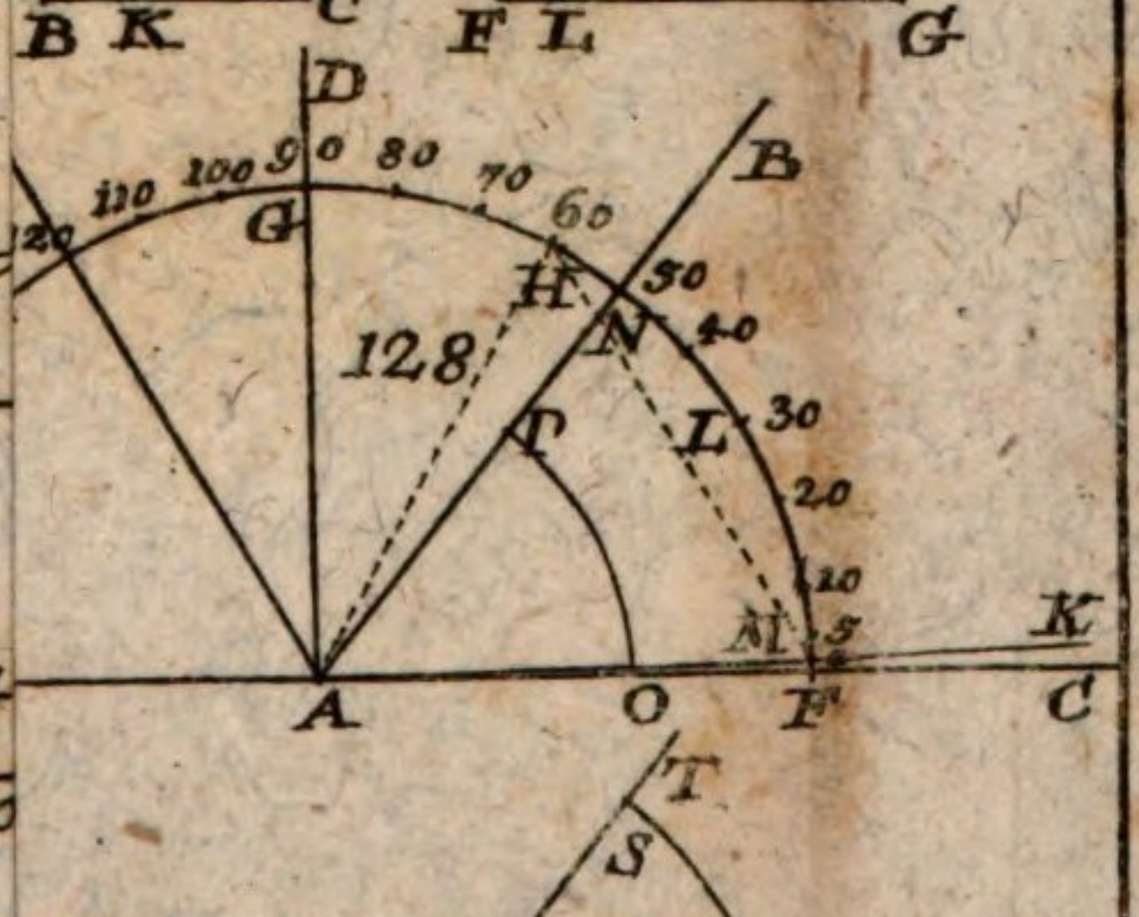
p
m
q
d

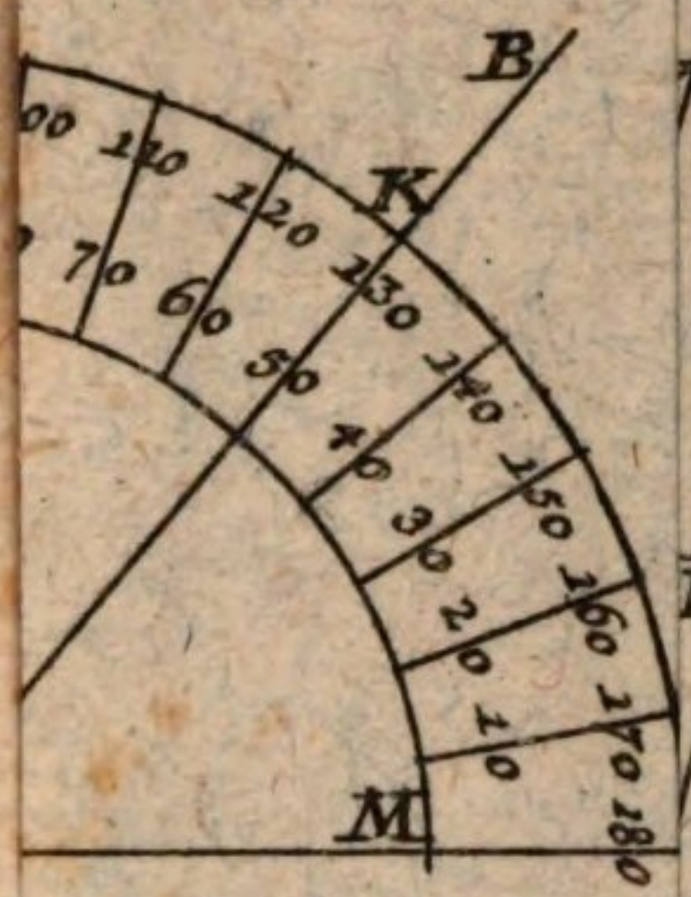
D
G
112
F
B
C
A
E

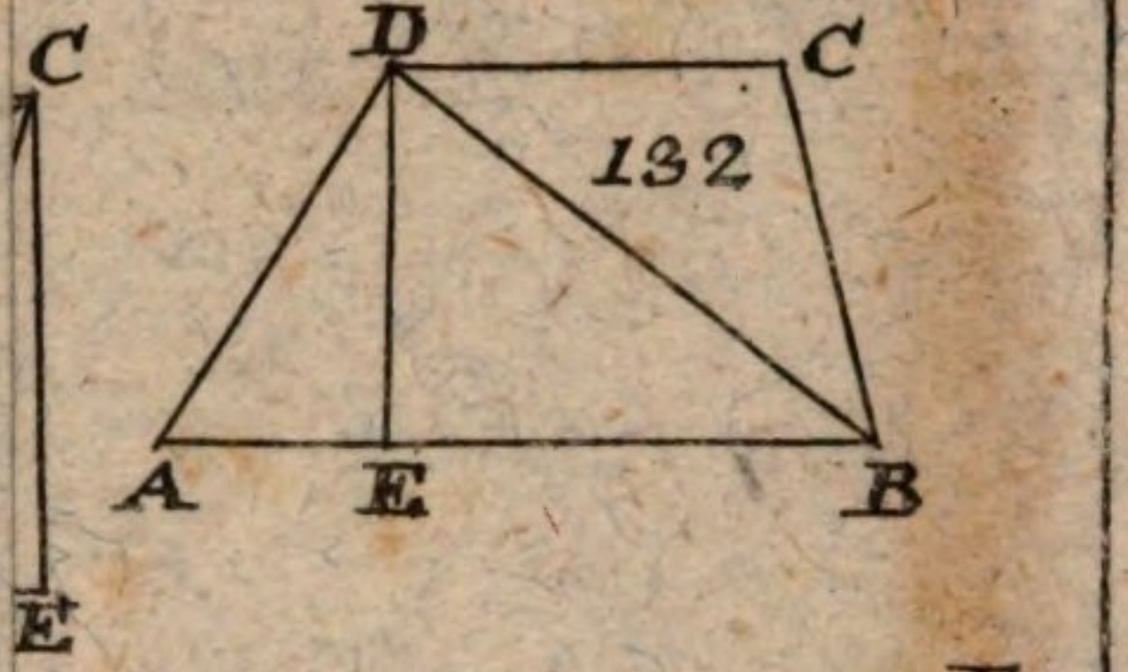

H
E
L
115
F
D
H
D
119
E
F
B
D
124
H
E
G
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
F
C
L
Q

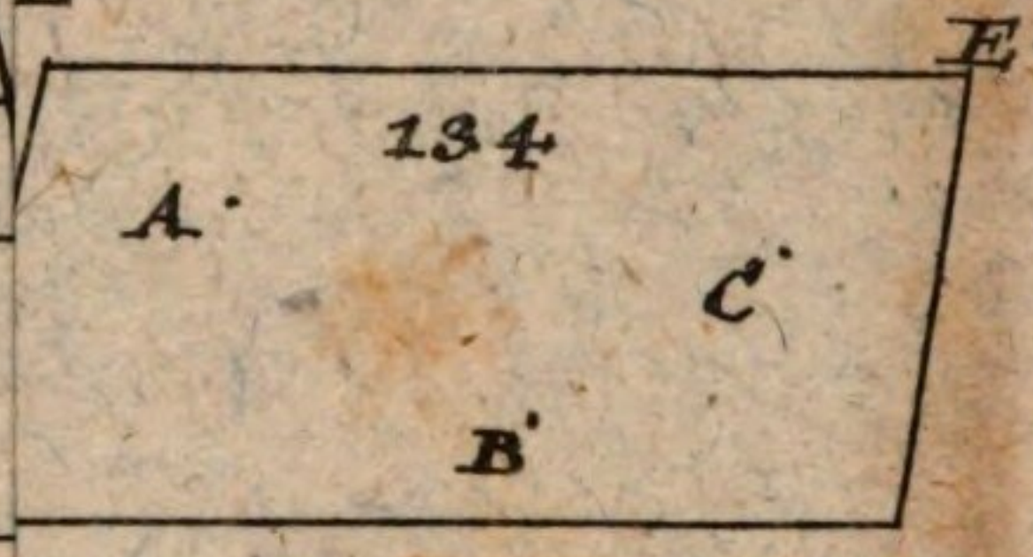

117
p
K
L
G
B
K

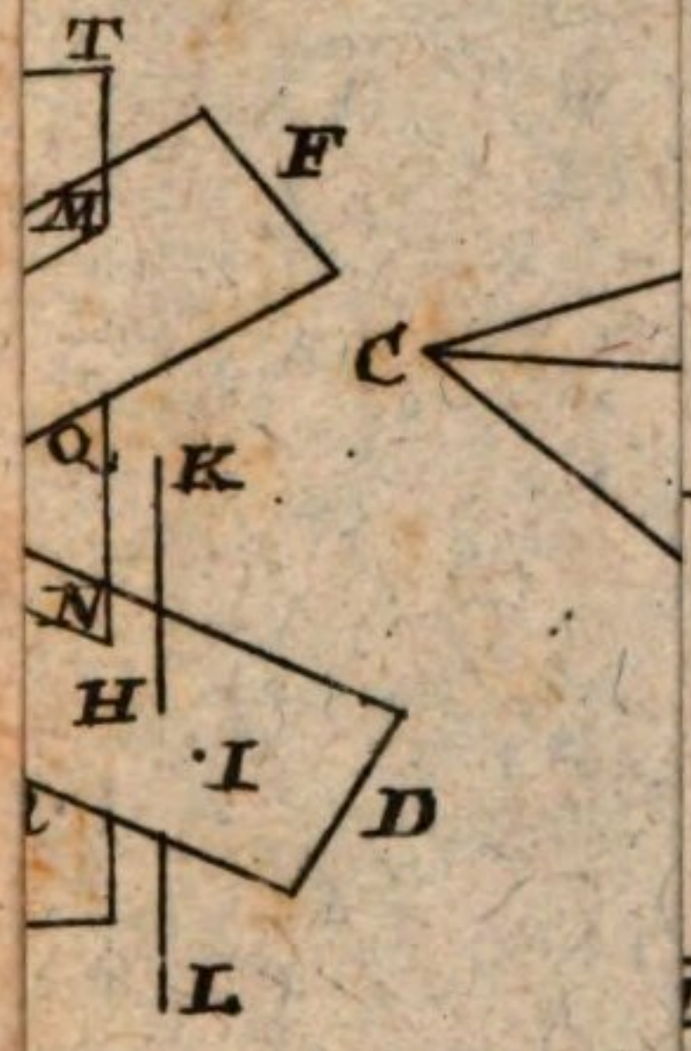

N
F
L
H
R
P
D
E
A
D
E
H
121
B
K
C
F
L
G

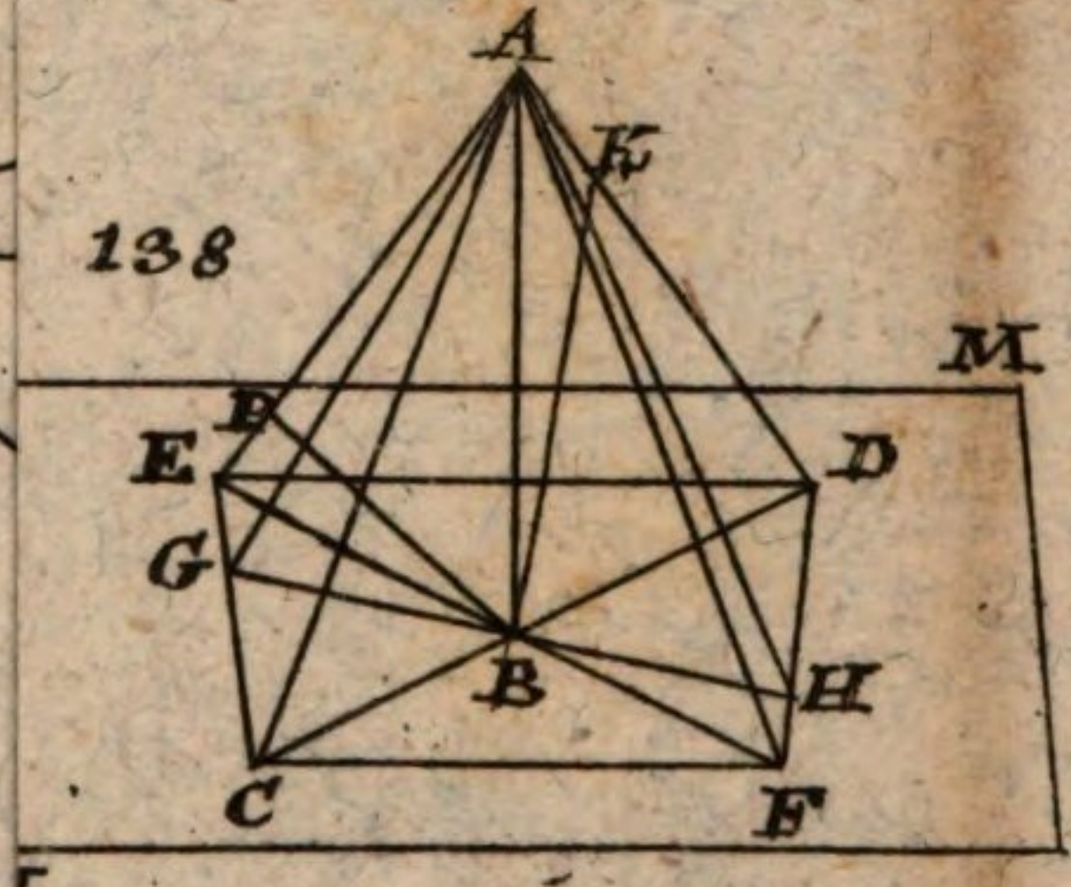

D
120
110
100
90
80
70
60
B
G
H
50
N
40
128
T
L
30
20
10
M
S
K
A
O
F
C
T
S
R
V
W

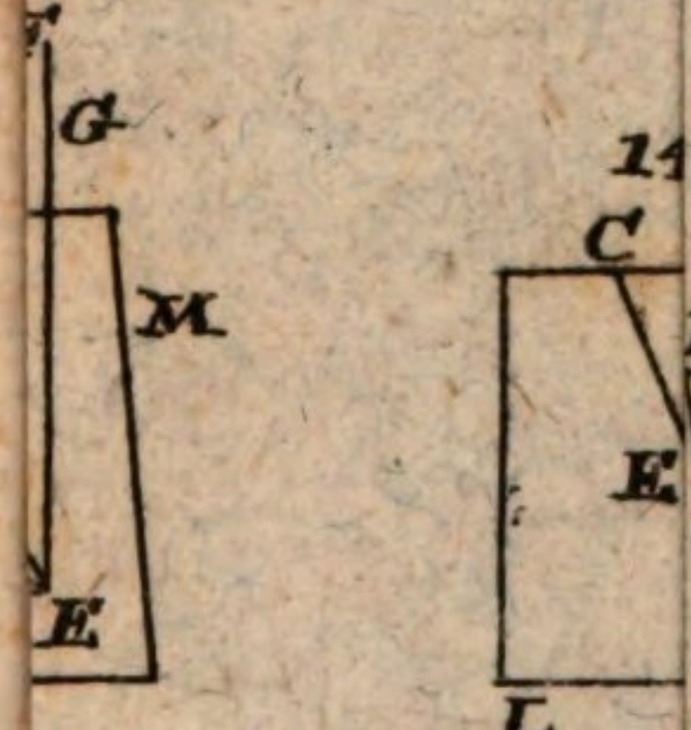

B
K
M

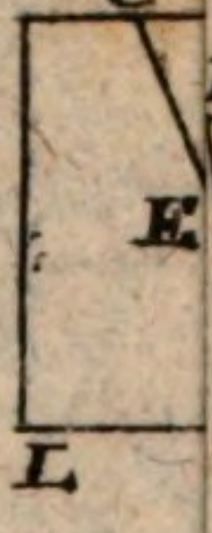

C
D
C
132
A
E
B
E

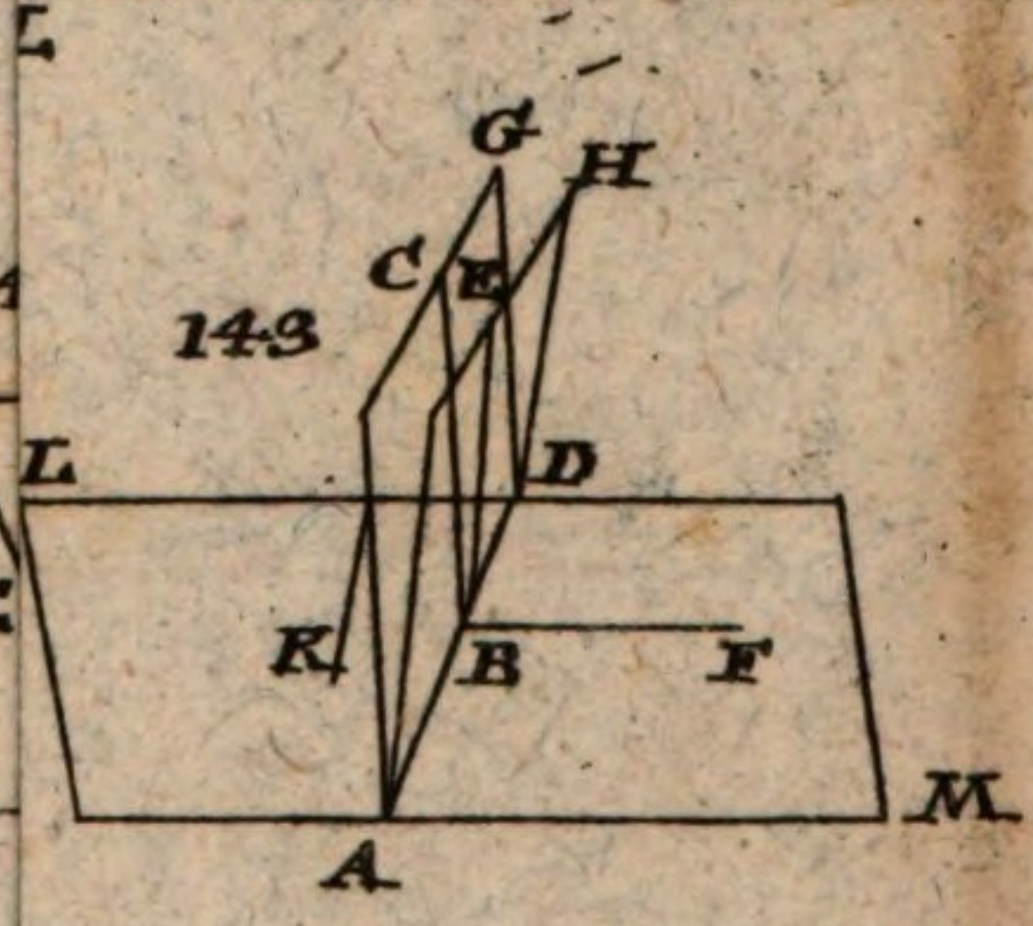

E
134
A
C
B

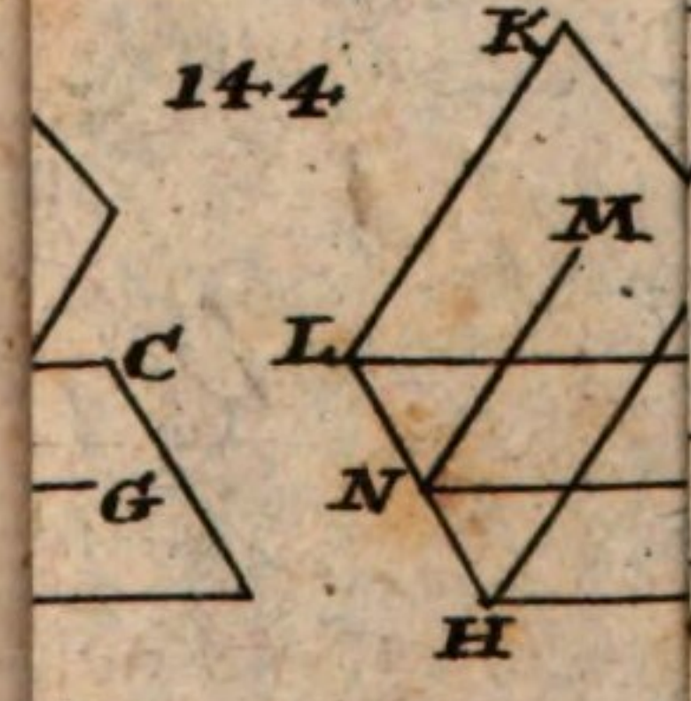

T
F
M
C
Q
K
N
H
I
D
L

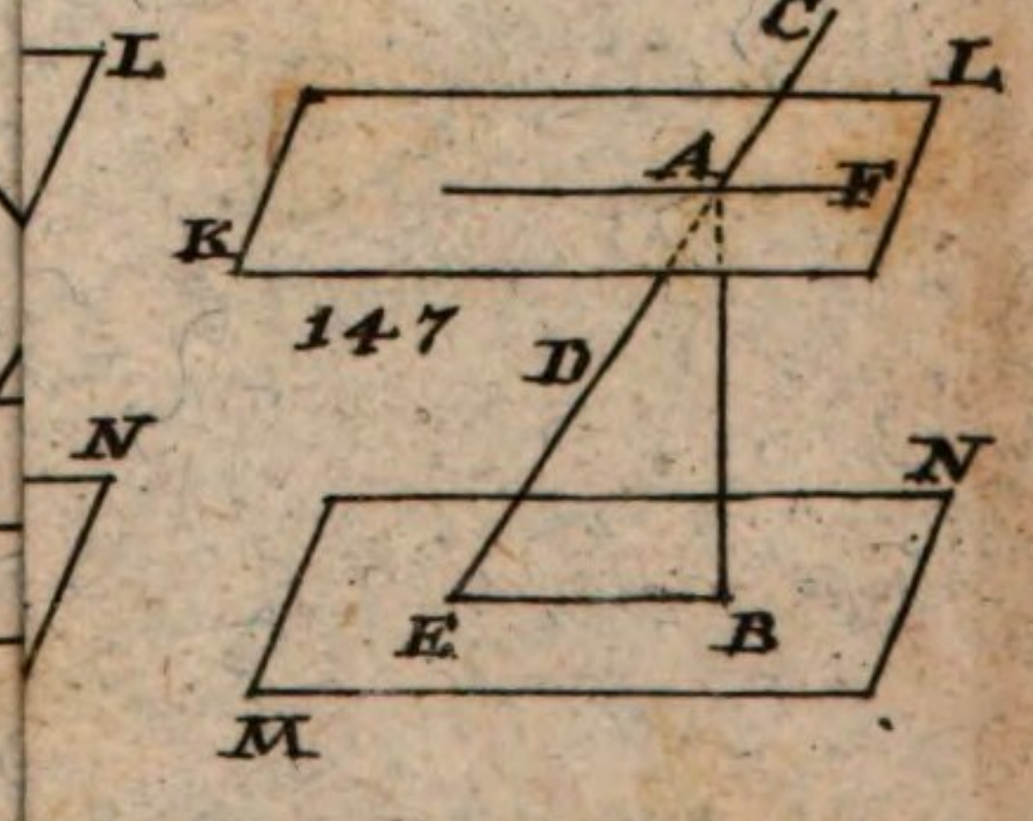

A
K
138
M
E
D
G
B
H
C
F


G
M
E

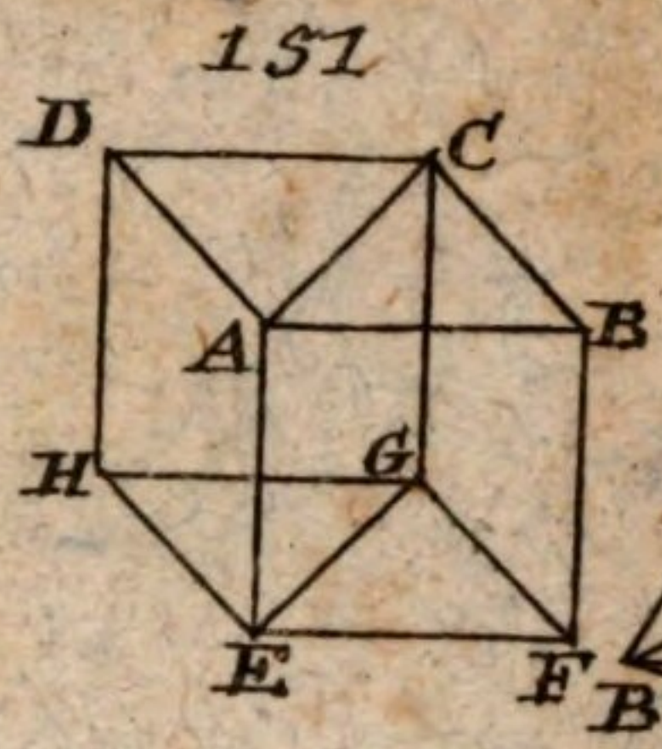

C
E
L


G
H
C
E
143
L
D
K
B
F
M
A

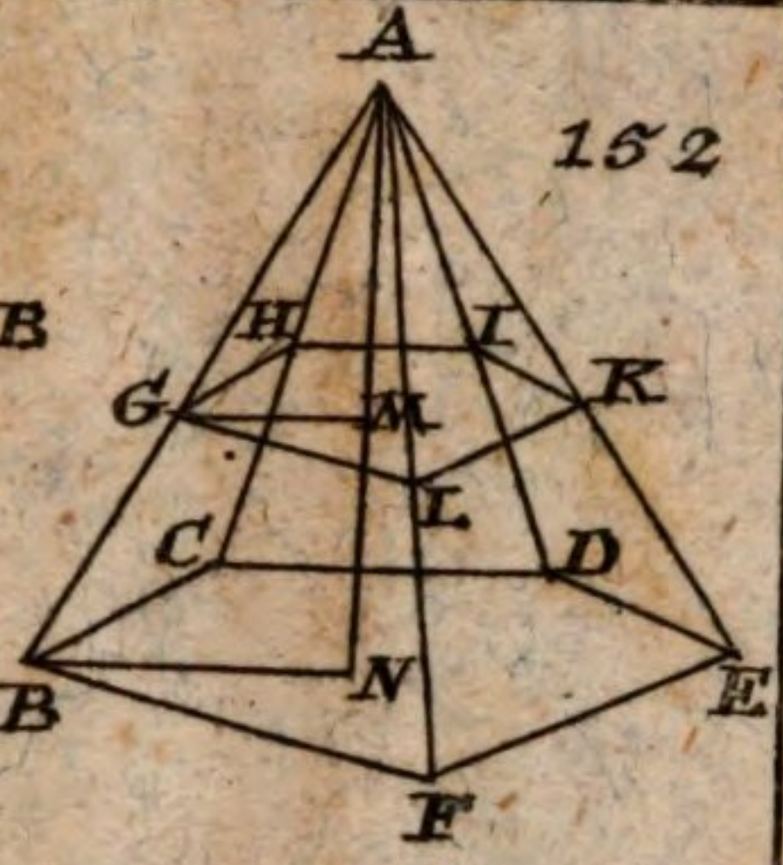

144
K
L
M
C
L
N
G
N
H

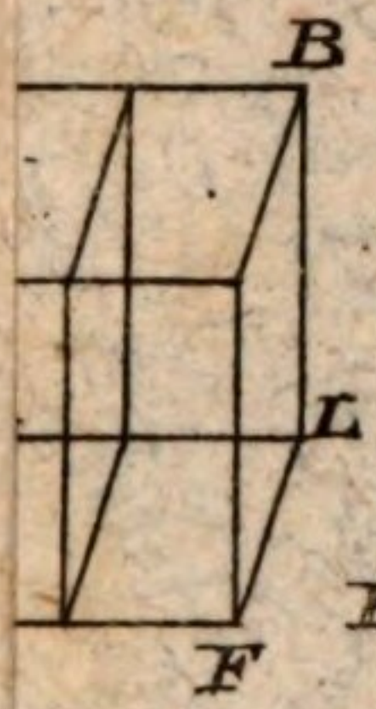

C
L
A
F
K
147
D
N
E
B
M

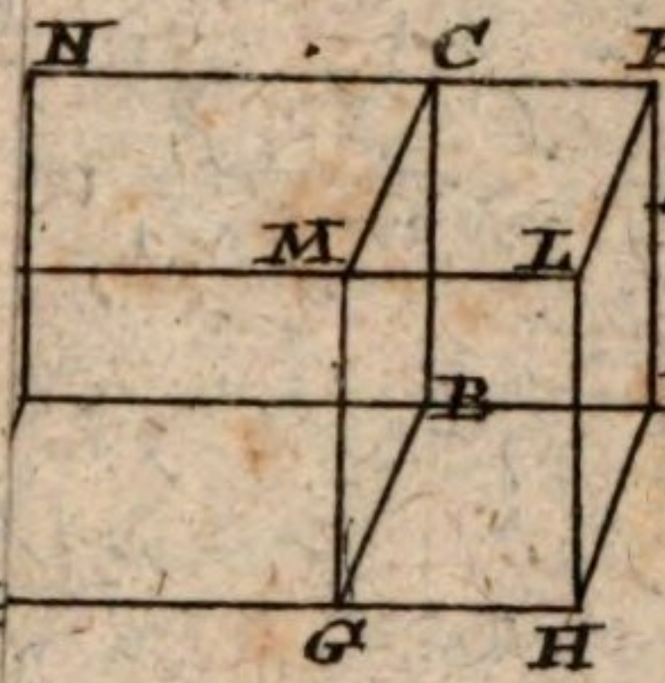
151



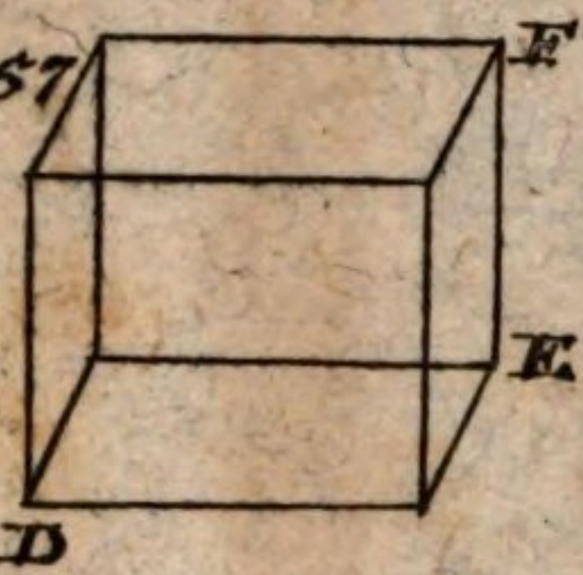
152

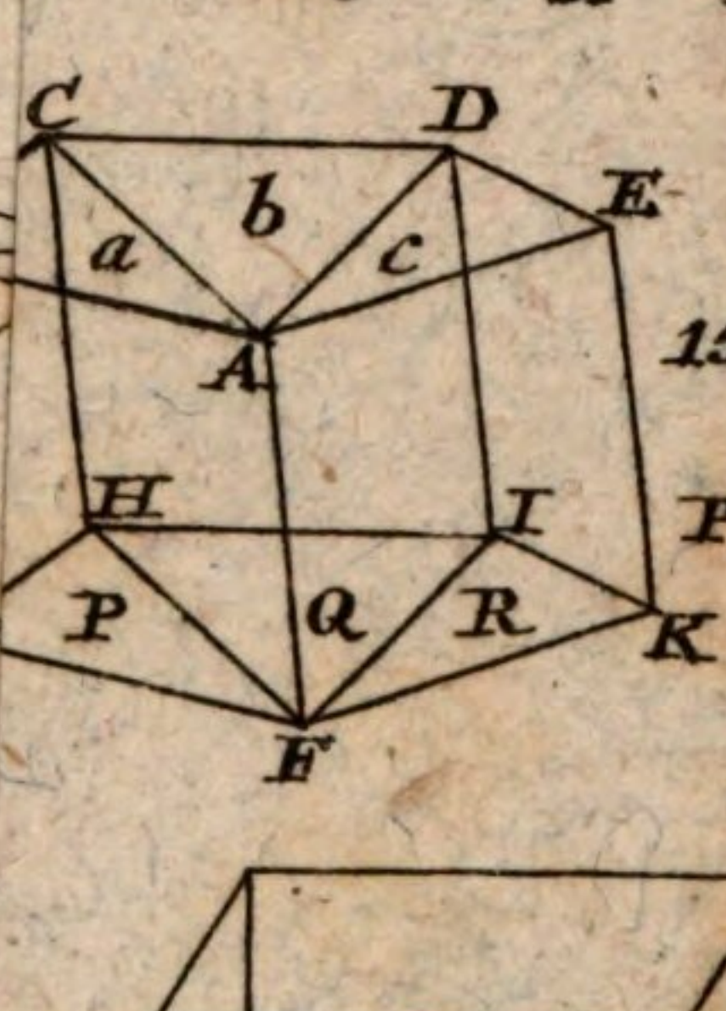




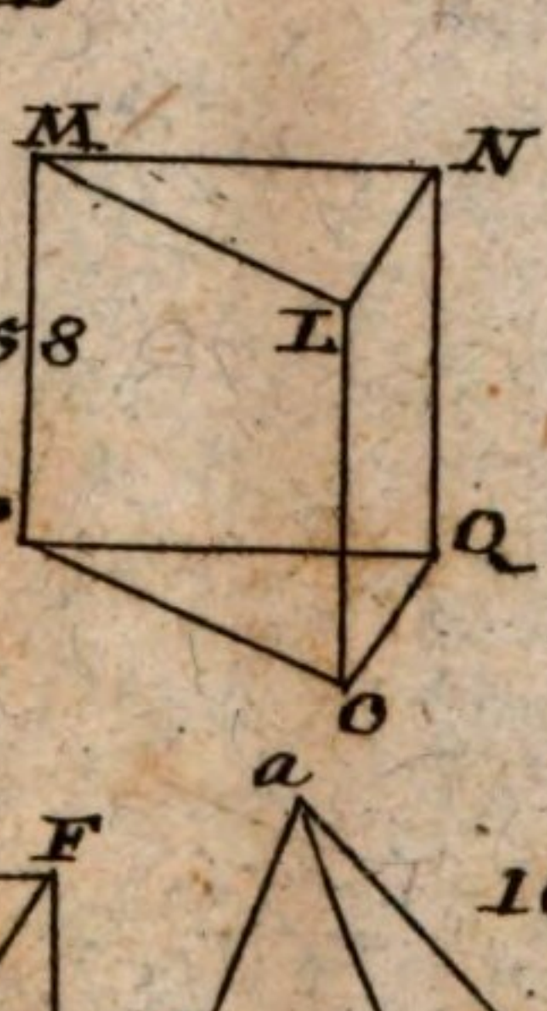


157





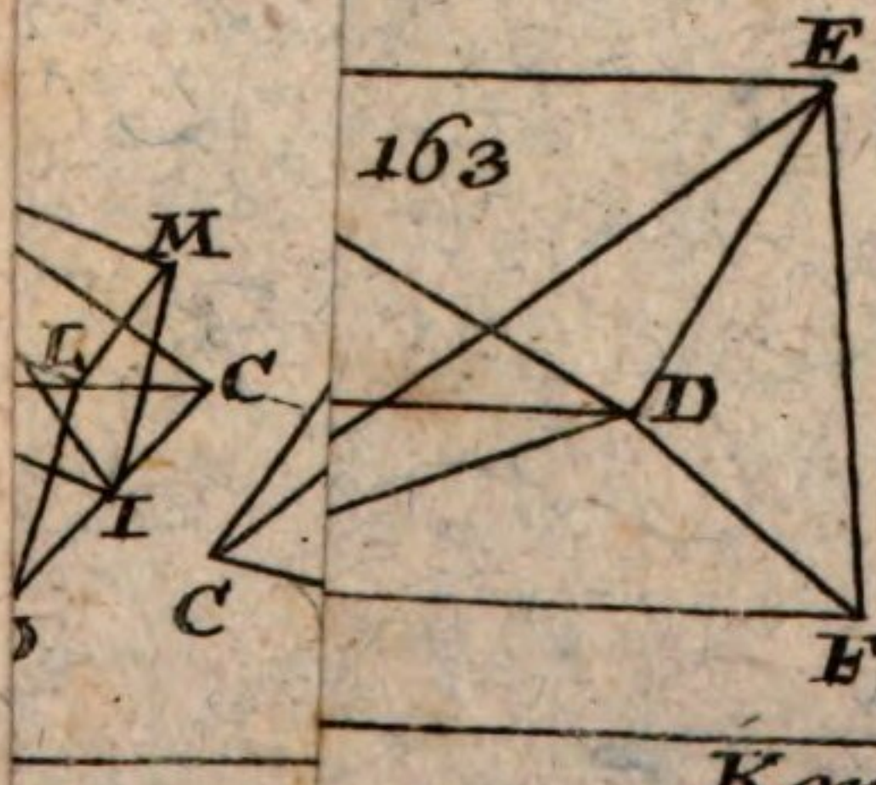
158



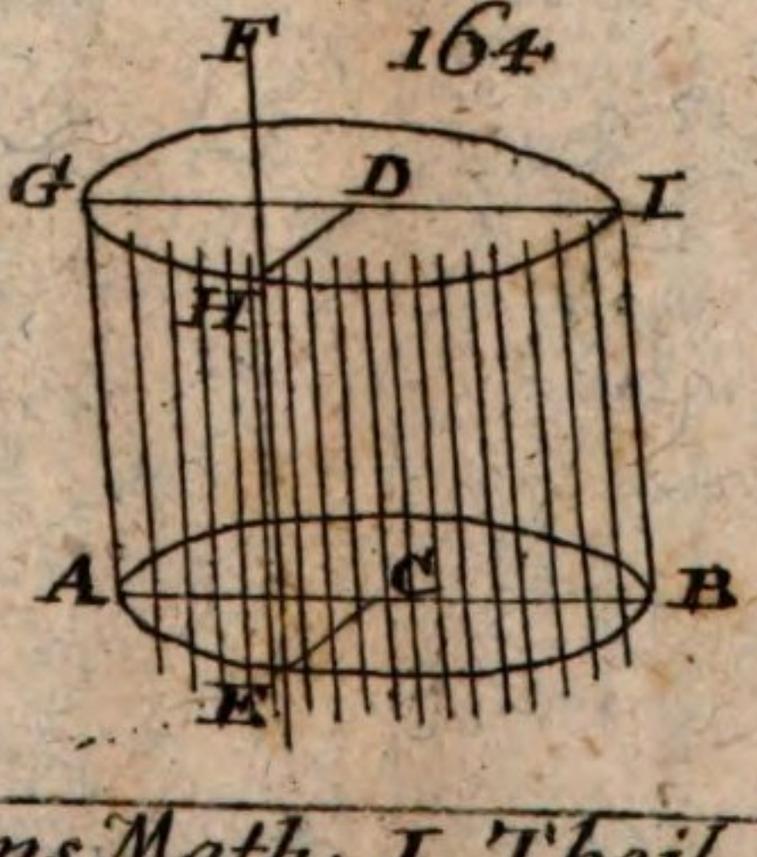
159

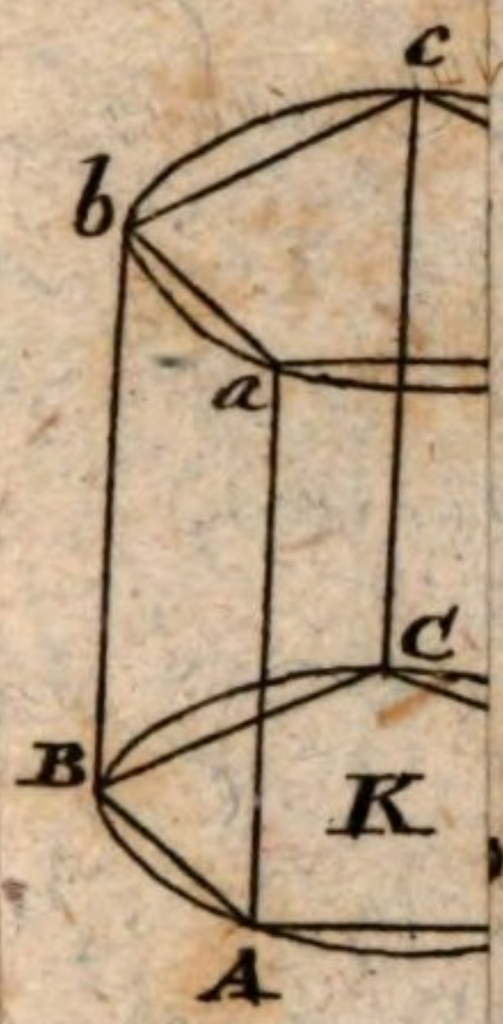
161

163

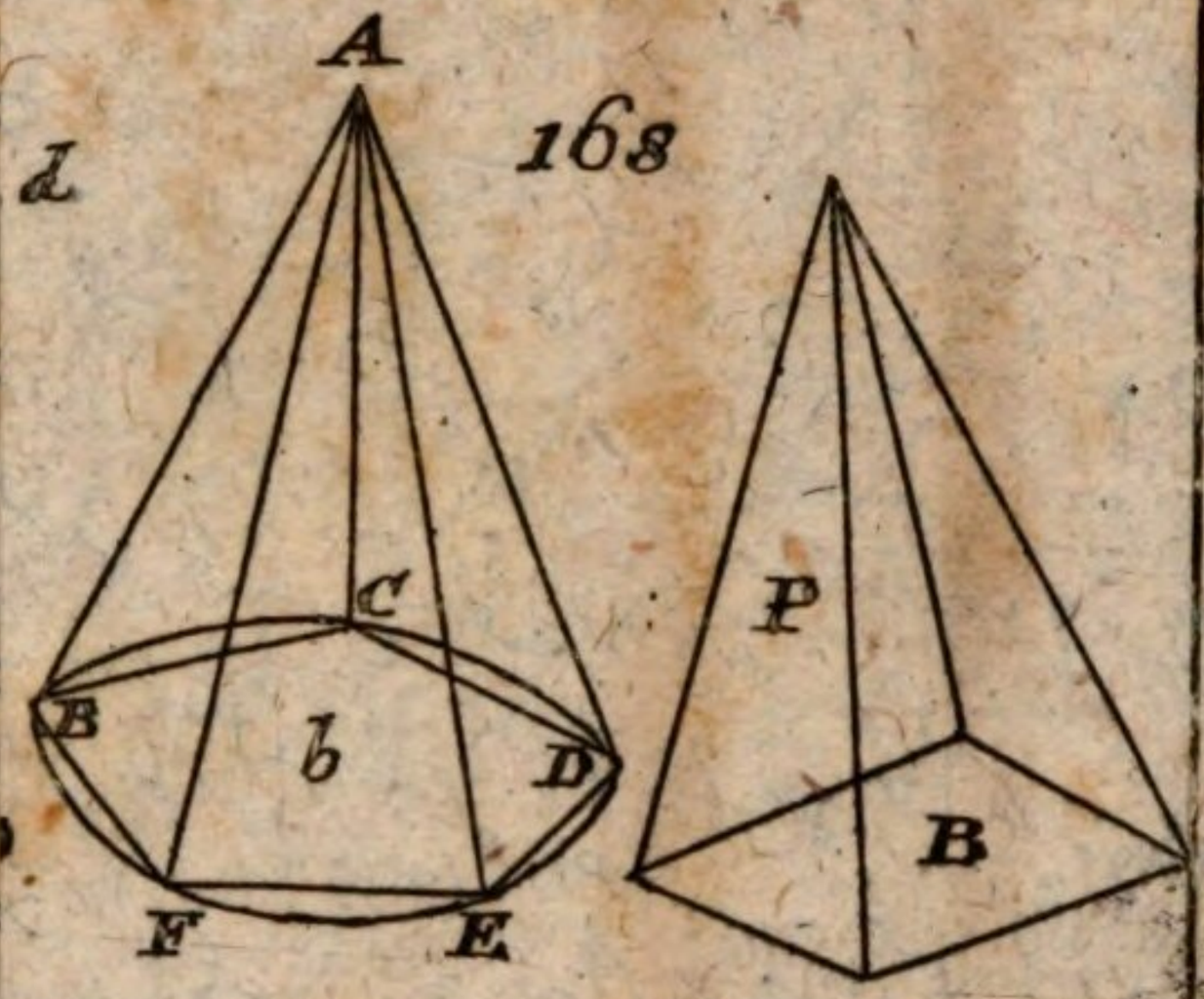


164



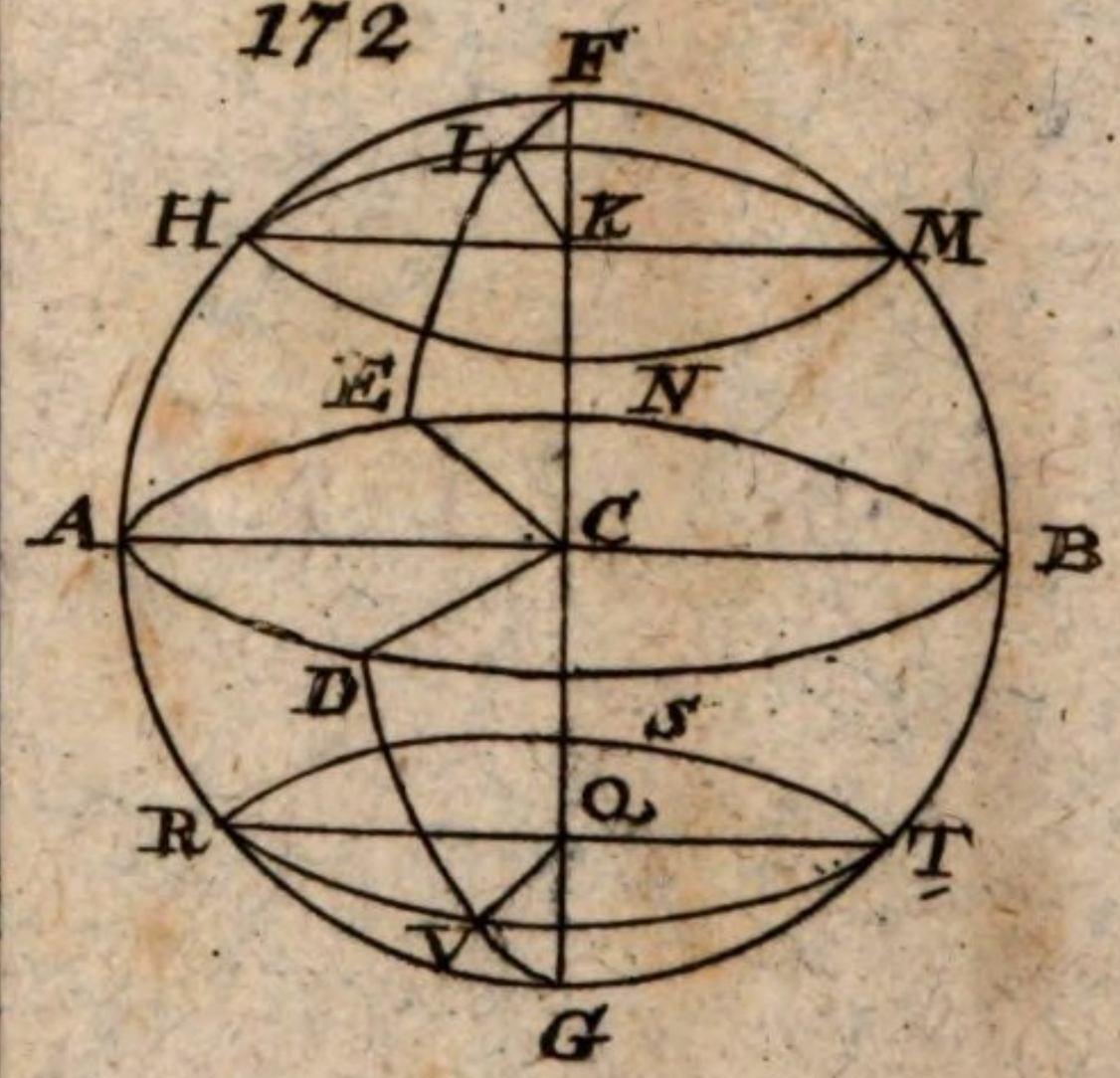

c
b
a
C
B
K
A

168


A
d
C
B
b
D
F
E
P
B

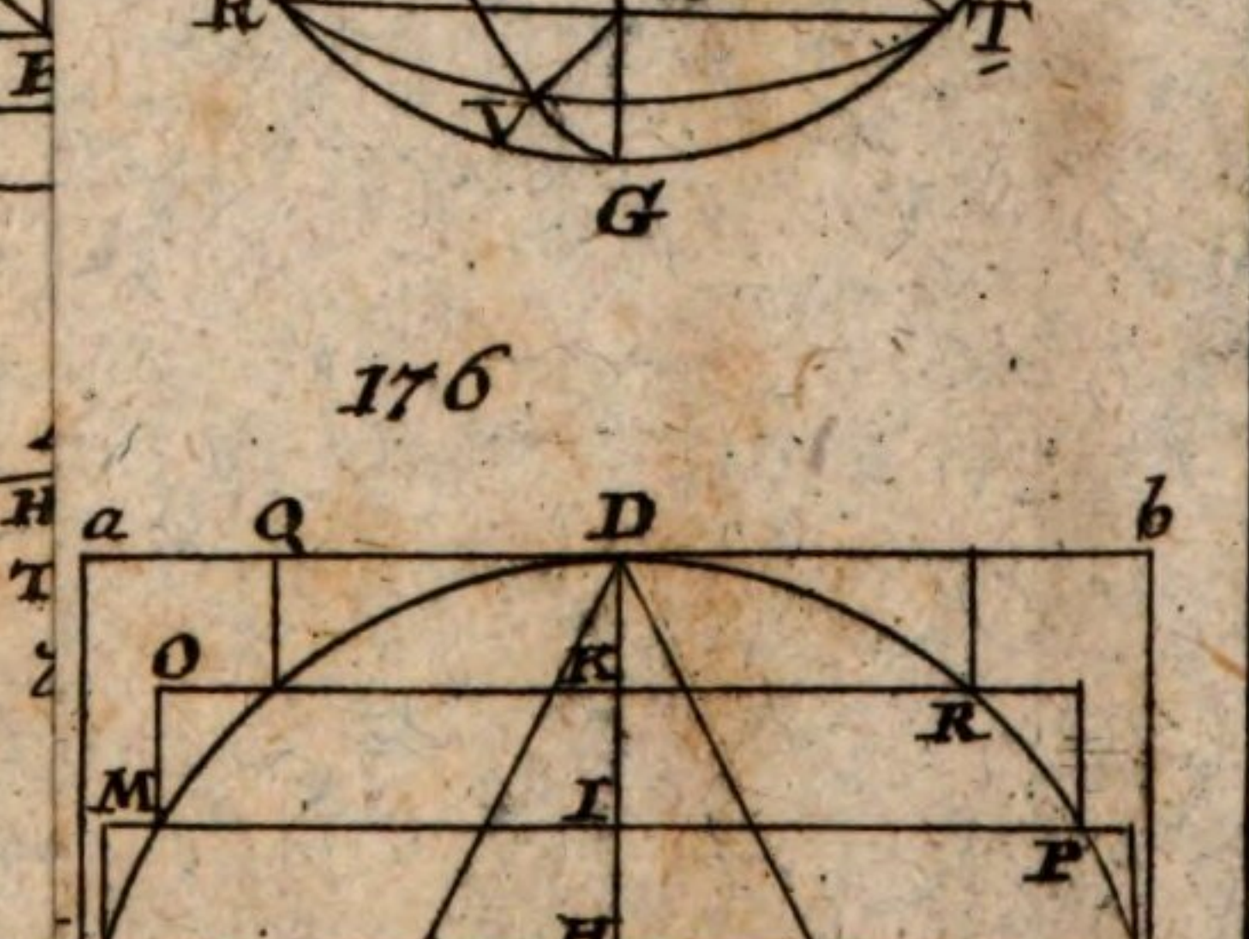
172

A
H
L
B
E


F
L
H
K
M
E
N
A
C
B
D
S
Q
R
T
V
G

176

F
E
N
G


a
Q
D
b
O
K
R
M
I
P
H
N
C
B
W
Y
U
Z
F
E
G

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Lehrbegriff der gesamten Mathematik

Bd.: Erster Theil

Greifswald 1782

Math.u. 87-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594009-8
VD18 90700090